

# Klausur Operations Research WS 2019/20

Iwanowski 14.02.2020

## Hinweise:

**Bearbeitungszeit:** 90 Minuten

**Erlaubte Hilfsmittel:** Taschenrechner, Geodreieck

Bitte tragen Sie Ihre Antworten ausschließlich an den freien Stellen nach den jeweiligen Aufgaben ein (ggf. auf der davorliegenden Rückseite weiterschreiben). Bei Bedarf benutzen Sie die gegenüberliegende Rückseite! Für Skizzen und Entwürfe steht ebenfalls die Rückseite zur Verfügung. Entwürfe, die nicht gewertet werden sollen, sind durchzustreichen.

Für die Klausur werden insgesamt 27 Bewertungseinheiten (BE) vergeben. Zum Bestehen benötigen Sie mindestens 13,5 BE.

Wegen eines Kopierfehlers fehlt Aufgabe 2.

Viel Erfolg!

### Aufgabe 1:

8 BE

Gegeben sei die folgende Optimierungsaufgabe:

Ein Logistikunternehmen bekommt den Generalauftrag für die Lieferung von Stahl aus Deutschland in die Mittelmeerregion. Es sollen mindestens 100 t geliefert werden. Zur Verfügung stehen die Transportmittel Bahn und Schiff. Mit der Bahn kostet der Versand einer Tonne 70 EUR mit dem Schiff 35 EUR. Wegen der schnelleren Verfügbarkeit sollen mindestens 30 t über die Schiene laufen. Aus Kapazitätsgründen sind aber mehr als 75 t auf der Schiene gar nicht möglich. Wie soll der Transport aufgeteilt werden, damit die Transportkosten minimiert werden?

- a) Definieren Sie ein mathematisches Optimierungsproblem aus linearen Ungleichungen und Zielfunktion, das genau diese Aufgabe beschreibt!

Hinweis: Vergessen Sie keine noch so triviale Ungleichung, welche die von Ihnen eingeführten Variablen erfüllen müssen!

(3 BE)

- b) Lösen Sie das Problem graphisch, indem Sie die zulässige Lösungsmenge skizzieren (mit genauer Angabe der Grenzgleichungen) und die optimale Lage der Zielfunktion einzeichnen.

(4 BE)



- c) Bestimmen Sie dann die optimalen Werte durch genaue Berechnung des optimalen Punktes, den Sie graphisch in b) bestimmt haben.

(1 BE)

**Aufgabe 3:**

2 BE

Wenn das Simplexverfahren zu einer gegebenen Aufgabenstellung das folgende Tableau erhält, welche Aussage können Sie über die Anzahl der optimalen Lösungen treffen? Begründen Sie Ihre Antwort.

|        | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ | $x_7$ | RS    |
|--------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
|        | 2     | 3     | 1     | 0     | -0,5  | 0     | 0,5   | 2,5   |
|        | 1     | 2     | 0     | 1     | -0,5  | -1    | 0,5   | 0,5   |
| -z     | -9    | -12   | 0     | 0     | 2,5   | 0     | -2,5  | -12,5 |
| $-z_2$ | 0     | 0     | 0     | 0     | 0     | -1    | -1    | 0     |

**Aufgabe 4:**

4 BE

Gegeben ist das folgende Optimierungsproblem:

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 10$$

$$x_1 + x_3 \geq 5$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

$$z = 2x_1 + x_2 + 3x_3 \rightarrow \min!$$

Das folgende Tableau wurde vom Simplexverfahren bei der Bestimmung der optimalen Lösung ermittelt ( $x_4$  ist die Schlupfvariable für die erste und  $x_5$  für die zweite Ungleichung):

|    | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ | RS |
|----|-------|-------|-------|-------|-------|-------|----|
|    | 0     | 1     | 0     | 1     | 1     | -1    | 5  |
|    | 1     | 0     | 0     | 0     | -1    | 1     | 5  |
| z  | 0     | -1    | -1    | 0     | -2    | 2     | 10 |
| z' | 0     | 0     | 0     | 0     | 0     | -1    | 0  |

a) Geben Sie die optimale Lösung für die Variablen  $x_1, x_2, x_3$  an.

(1 BE)

b) Ermitteln Sie, in welchem Bereich sich der Wert für die rechte Seite der zweiten Ungleichung (im Moment 5) befinden darf, ohne dass die bisher optimale Lösung ihre Zulässigkeit verliert. Begründen Sie Ihre Antwort durch entsprechende Rechnungen. (3 BE)

**Aufgabe 5:**

5 BE

Gegeben sei die folgende Optimierungsaufgabe:

Es ist Treibstoff von Depots  $d_1, d_2, d_3$  zu Tankstellen  $t_1, t_2, t_3, t_4$  zu transportieren.

Die Transportkosten (in EUR pro hl), Vorräte (hl) und Bedarfe (hl) sind folgendermaßen:

|          | Vorräte | $t_1$ | $t_2$ | $t_3$ | $t_4$ |  |  |
|----------|---------|-------|-------|-------|-------|--|--|
| Bedarfe: |         | 60    | 60    | 90    | 100   |  |  |
| $d_1$    | 150     | 6     | 7     | 8     | 6     |  |  |
| $d_2$    | 160     | 6     | 5     | 9     | 4     |  |  |
| $d_3$    | 100     | 3     | 10    | 2     | 5     |  |  |
|          |         |       |       |       |       |  |  |
|          |         |       |       |       |       |  |  |

Die praktische Aufgabenstellung besteht darin, einen Belieferungsplan zu erstellen, der die Transportkosten minimiert. Für diese Klausuraufgabe soll Folgendes erledigt werden:

- Erweitern Sie die Tabelle, sodass sie für die automatische Optimierung mit Hilfe der Stepping-Stone- oder MODI-Methode einsatzfähig ist. (2 BE)
- Erstellen Sie eine Eröffnungslösung, wie sie in der Vorlesung vorgestellt wurde und auf Folie 11 des Begleit-Handouts beschrieben wird. (2 BE)
- Geben Sie die Transportkosten dieser Eröffnungslösung an. (1 BE)

### Aufgabe 6:

4 BE

In einem Transportproblem gibt es folgende Ressourcen und Verbraucher mit entsprechenden Vorräten und Bedarfen und Transportkosten, wobei die vorhandenen Vorräte gleich den nachgefragten Bedarfen sind:

|          | Vorräte | $v_1$        | $v_2$         | $v_3$        |
|----------|---------|--------------|---------------|--------------|
| Bedarfe: |         | 200          | 300           | 150          |
| $u_1$    | 400     | 5 <i>200</i> | 7 <i>50</i>   | 6 <i>150</i> |
| $u_2$    | 250     | 2<br>-6      | 10 <i>250</i> | 4<br>-5      |

Ziel ist es, einen Belieferungsplan zu erstellen, der die Transportkosten minimiert. Hierfür wurde eine Basislösung erstellt, welche aus den markierten Feldern besteht. Die Menge der tatsächlich transportierten Einheiten ist kursiv dargestellt. Außerdem wurden für alle Nichtbasisvariablen unten rechts bereits die Kostenänderungen pro Transporteinheit angegeben, wenn diese in die Basis aufgenommen werden.

Für die Klausuraufgabe soll Folgendes erledigt werden:

Wählen Sie einen möglichen Basiswechsel aus und führen Sie für diesen die bestmögliche Transportveränderung durch.

Geben Sie hier die Nebenrechnungen an und machen Sie in der Tabelle kenntlich, welche Transporte in der verbesserten Lösung durchgeführt werden, indem Sie die Werte oben verändern. Die alten und neuen Gesamttransportkosten müssen Sie nicht ausrechnen.

## Aufgabe 7:

4 BE

In einem Hetero-Partnerschaftssuchportal wurden Eignungswerte ermittelt, die für die Erwartung einer dauerhaften Partnerschaft zwischen einem Mann und einer Frau stehen. Die Werte sind in der folgenden Tabelle eingetragen:

|        | Anna | Berta | Claudia | Dora |
|--------|------|-------|---------|------|
| Anton  | 10   | 1     | 3       | 7    |
| Bill   | 2    | 4     | 7       | 10   |
| Cäsar  | 20   | 3     | 5       | 9    |
| Donald | 10   | 2     | 9       | 3    |
| Ernst  | 10   | 20    | 15      | 7    |

Finden Sie eine eindeutige Zuordnung, in der jedem Mann höchstens eine Frau und jeder Frau höchstens ein Mann zugeordnet ist, welche die Summe der Eignungswerte maximiert, mit Hilfe der ungarischen Methode.

Hinweis: Verwenden Sie für die Zwischenschritte die unten angegebenen Tabellenvorlagen. Die Vorlagen geben mehr Zwischenschritte an, als Sie brauchen.

1)

|        | Anna | Berta | Claudia | Dora |
|--------|------|-------|---------|------|
| Anton  |      |       |         |      |
| Bill   |      |       |         |      |
| Cäsar  |      |       |         |      |
| Donald |      |       |         |      |
| Ernst  |      |       |         |      |

2)

|        |  |  |  |  |
|--------|--|--|--|--|
| Anton  |  |  |  |  |
| Bill   |  |  |  |  |
| Cäsar  |  |  |  |  |
| Donald |  |  |  |  |
| Ernst  |  |  |  |  |

3)

|        |  |  |  |  |
|--------|--|--|--|--|
| Anton  |  |  |  |  |
| Bill   |  |  |  |  |
| Cäsar  |  |  |  |  |
| Donald |  |  |  |  |
| Ernst  |  |  |  |  |

4)

|        |  |  |  |  |
|--------|--|--|--|--|
| Anton  |  |  |  |  |
| Bill   |  |  |  |  |
| Cäsar  |  |  |  |  |
| Donald |  |  |  |  |
| Ernst  |  |  |  |  |