Klausur Operations Research WS 2018/2019

Iwanowski 15.02.2019

Hinweise:

Bearbeitungszeit: 90 Minuten

Erlaubte Hilfsmittel: Taschenrechner, Geodreieck

Bitte tragen Sie Ihre Antworten ausschließlich an den freien Stellen nach den jeweiligen Aufgaben ein (ggf. auf der davorliegenden Rückseite weiterschreiben). Bei Bedarf benutzen Sie die gegenüberliegende Rückseite! Für Skizzen und Entwürfe steht ebenfalls die Rückseite zur Verfügung. Entwürfe, die nicht gewertet werden sollen, sind durchzustreichen.

Für die Klausur werden insgesamt 45 Bewertungseinheiten (BE) vergeben. Zum Bestehen benötigen Sie mindestens 22,5 BE.

Viel Erfolg!

Aufgabe 1: 10 BE

Gegeben sei die folgende Optimierungsaufgabe:

Eine Firma will das Rezept für ihre Nuss-Nougat-Creme verändern mit dem Ziel, den Gewinn zu erhöhen. Die einzigen Bestandteile sind Zucker sowie eine Masse aus Wasser, Nüssen und Kakaobohnen (WNK-Masse), die bereits fertig geliefert wird. Täglich stehen 6 t Zucker und 4 t WNK-Masse zur Verfügung, die in einem bestimmten Verhältnis zusammengerührt werden sollen. Wegen Auflagen des Gesundheitsamts darf nicht mehr Zucker als WNK-Masse verwendet werden. Aus Kapazitätsgründen können täglich nicht mehr als 6 t Nuss-Nougat-Creme hergestellt werden. Die Verwendung von 1 kg Zucker bringt einen Gewinn von 1 EUR, die von 1 kg WNK-Masse einen Gewinn von 50 Cent. Es soll ein Tagesprogramm für den maximalen Gewinn erarbeitet werden. Dabei müssen Sie genau nach den Schritten a)-c) vorgehen. Andere Lösungswege sind nicht zulässig.

a) Definieren Sie ein mathematisches Optimierungsproblem aus linearen Ungleichungen und Zielfunktion, das genau diese Aufgabe beschreibt. (3,5 BE)
Hinweis: Vergessen Sie keine noch so triviale Ungleichung, welche die von Ihnen eingeführten Variablen erfüllen müssen!

b) Lösen Sie das Problem graphisch, indem Sie die zulässige Lösungsmenge skizzieren (mit genauer Angabe der Grenzgleichungen) und die optimale Lage der Zielfunktion einzeichnen. (4,5 BE)

c) Bestimmen Sie dann die optimalen Werte durch genaue Berechnung des optimalen Punktes, den Sie graphisch in b) bestimmt haben. (2 BE)

Aufgabe 2: 8 BE

Stellen Sie ein Simplex-Lösungstableau für das folgende Optimierungsproblem auf und bestimmen Sie eine erste zulässige Lösung. Geben Sie auch den zugehörigen Wert der Zielfunktion an. Geben Sie alle Tableaus an, die Sie auf dem Weg zur ersten Lösung brauchen.

$2x_1 - x_2 \leq -1$

$3x_1 + x_2 \leq 5$

$x_1, x_2 \geq 0$

$z = 4x_1 + x_2 \rightarrow \min!$

Aufgabe 3:

3 BE

Wenn das Simplexverfahren zu einer gegebenen Aufgabenstellung mit den Entscheidungsvariablen x_1, x_2, x_3 das folgende Tableau erhält, welche Aussage können Sie über die Anzahl der optimalen Lösungen treffen? Begründen Sie Ihre Antwort.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RS
	-5	1	0	0	2	5	10
	-1	0	1	0	0	2	1
	0	0	0	1	1	3	7
-z	-2	0	0	0	-2	0	-10

Aufgabe 4: 5 BE

Gegeben ist das folgende Optimierungsproblem:

$2\ x_1 + \ 4\ x_2\ - 2\ x_3 \leq 100$ (Schlupfvariable x_4)

$6\ x_1 - \ 3\ x_2\ + 3\ x_3 \geq 210$ (Schlupfvariable x_5)

$x_1 + \ 8\ x_2 \leq 400$ (Schlupfvariable x_6)

$x_1, x_2, x_3 \geq 0$

$z = 7\ x_1 - 11\ x_2 + 3\ x_3 \rightarrow \text{min!}$

Das folgende Tableau wurde vom Simplexverfahren bei der Bestimmung der optimalen Lösung ermittelt:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RS
	1/8	1	0	0	0	1/8	50
	23/4	0	0	1	-2/3	-1/4	140
	17/8	0	1	0	-1	1/8	120
-z	-2	0	0	0	-1	-1	-190

a) Geben Sie die optimale Lösung für die Variablen x_1, x_2, x_3 an. (2 BE)

b) Ermitteln Sie, in welchem Bereich sich die rechte Seite der ersten Ungleichung (im Moment 100) befinden darf, ohne dass die bisher optimale Lösung ihre Zulässigkeit verliert. Begründen Sie Ihre Antwort durch entsprechende Rechnungen. (3 BE)

Aufgabe 5: 5 BE

Gegeben sei die folgende Optimierungsaufgabe:

$$x_1 + 2x_2 - 3x_3 \leq 100$$

$$3x_1 + 2x_2 - 2x_3 \geq 200$$

$$x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 150$$

$$x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{N};$$

$$z = 2x_1 - 3x_2 + x_3 \rightarrow \text{max!}$$

Ein Simplex-Verfahren, das die ganzzahlige Bedingung ignorierte, bekam folgendes Lösungstableau heraus:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RS
	0	2,833	0	1,833	1	1,167	158,333
	1	1,5	0	0,5	0	0,5	125
	0	-0,167	1	-0,167	0	0,167	8,333
-z	0	-5,833	0	-0,833	0	-1.167	-258,333

Beschreiben Sie den nächsten Schritt im branch-and-bound-Verfahren, um eine ganzzahlige Lösung zu bestimmen. Spezifizieren Sie die genauen Aufgabenstellungen, die im nächsten Schritt gelöst werden müssen.
<u>Hinweis:</u> Sie müssen nicht alle Aufgabenstellungen spezifizieren, bis eine ganzzahlige Lösung gefunden wurde, sondern nur genau die beiden, welche sich im nächsten Aufteilungsschritt ergeben.

Aufgabe 6: 8 BE

Gegeben sei die folgende Optimierungsaufgabe:

Es ist Treibstoff von Depots d_1, d_2, d_3 zu Tankstellen t_1, t_2, t_3, t_4 zu transportieren.

Die Transportkosten sind die linken oberen Zahlen in jedem Feld: An Stelle (i,j) stehen die Kosten in EUR, die der Transport eines hl von d_i nach t_j kostet.

		t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	
d_1	0	3 *60*	7	5	6 *40*	2	
d_2	3	6	3	4 *60*	3	8 *40*	
d_3	-1	3	1 *60*	5	5 *20*	4 *20*	

Jedes Depot habe einen Vorrat von 100 hl und jede Tankstelle einen Bedarf von 60 hl.

Die kursiven Zahlen in den Transportfeldern geben eine Lösung an: An Stelle (i,j) steht die Menge von Treibstoff, der von d_i nach t_j geliefert werden soll.

Die Zahlen in den Depotfeldern geben die Werte u_i an, welche nach der MODI-Methode berechnet wurden.

a) Berechnen Sie die Werte v_j für die Tankstellenfelder nach der MODI-Methode. (3 BE)

b) Berechnen Sie mit der MODI-Methode für jedes Transportfeld, das im Moment nicht genutzt wird, die Erhöhung bzw. Erniedrigung der Kosten in EUR pro hl. (2 BE)

c) Führen Sie die Verbesserung für das beste in b) gefundene Feld durch, ändern Sie die Transportwerte in der Tabelle oben, geben Sie an, wie viele hl über das neue Basisfeld transportiert werden sollen, und was die Gesamtverbesserung in EUR ist. (3 BE)

Aufgabe 7: 6 BE

Gegeben sei die folgende Optimierungsaufgabe:

Dora plant einen Besichtigungstag in Hamburg: Sie hat dafür zwischen 8 Uhr und 22 Uhr Zeit. In dieser Zeit möchte sie gerne Folgendes unternehmen:

Mindestens 2 Stunden möchte sie einen Einkaufsbummel machen, ferner mindestens 4 Stunden in den Tierpark, 2 Stunden in den Stadtpark, 2 Stunden in den Hafen, 1 Stunde auf den Michel, 1 Stunde in die Elbphilharmonie und 3 Stunden zur Modelleisenbahn. Für Pausen zwischendurch, die sie auch braucht, um von einem Ort zum anderen zu gelangen, und in denen auch gegessen werden soll, möchte sie gerne 4 Stunden veranschlagen. 2 Stunden davon müssen es in jedem Fall sein, weil sie sonst gar nicht die Wege bewältigen kann.

a) Geben Sie an, welches mathematische Problem hier besteht und wie man dieses Problem vom Grundsatz her in der Praxis am Besten lösen könnte. (2 BE)

b) Geben Sie eine Modellierung als lineares Optimierungsproblem an (mit allen benötigten Variablen), die nach Ihrem in a) vorgeschlagenen Lösungsansatz vorgeht. (4 BE)
Hinweis: Die Lösung müssen Sie nicht mehr ausrechnen.