Klausur Operations Research SS 2017

Iwanowski 18.08.2017

<u>Hinweise:</u>

Bearbeitungszeit: 90 Minuten

Erlaubte Hilfsmittel: Taschenrechner, Geodreieck

Bitte tragen Sie Ihre Antworten ausschließlich an den freien Stellen nach den jeweiligen Aufgaben ein (ggf. auf der davorliegenden Rückseite weiterschreiben). Bei Bedarf benutzen Sie die gegenüberliegende Rückseite! Für Skizzen und Entwürfe steht ebenfalls die Rückseite zur Verfügung. Entwürfe, die nicht gewertet werden sollen, sind durchzustreichen.

Für die Klausur werden insgesamt 40 Bewertungseinheiten (BE) vergeben. Zum Bestehen benötigen Sie mindestens 20 BE, wenn Sie diese Klausur als eigenständige Prüfungsleistung schreiben.

Viel Erfolg!

Aufgabe 1: 8 BE

Gegeben sei die folgende Optimierungsaufgabe:

Ein Stahlproduzent will Stahl an einen Kunden ausliefern. Die minimal benötigte Menge beträgt 40 t. Zur Verfügung stehen ihm die Transportwege Schiene und Straße. Mit der Bahn kostet der Versand einer Tonne 70 EUR und auf der Straße 35 EUR. Aus Umweltschutzgründen muss der Produzent mindestens die Hälfte des Transports über die Schiene abwickeln. Außerdem kann er aus Kapazitätsgründen über die Straße nicht mehr als 25 t transportieren. Wie soll er den Transport aufteilen, damit die Transportkosten minimiert werden?

a) Definieren Sie ein mathematisches Optimierungsproblem aus linearen Ungleichungen und Zielfunktion, das genau diese Aufgabe beschreibt!
Hinweis: Vergessen Sie keine noch so triviale Ungleichung, welche die von Ihnen eingeführten Variablen erfüllen müssen! (3 BE)

b) Lösen Sie das Problem graphisch, indem Sie die zulässige Lösungsmenge skizzieren (mit genauer Angabe der Grenzgleichungen) und die optimale Lage der Zielfunktion einzeichnen. (4 BE)

c) Bestimmen Sie dann die optimalen Werte durch genaue Berechnung des optimalen Punktes, den Sie graphisch in b) bestimmt haben. (1 BE)

.

Aufgabe 2: 5 BE

a) Wenn das Simplexverfahren zu einer gegebenen Aufgabenstellung das folgende Tableau erhält, welche Aussage können Sie über die Anzahl der optimalen Lösungen treffen? Begründen Sie Ihre Antwort! (3 BE)

b) Geben Sie eine Lösung an, wenn es eine gibt. Geben Sie eine weitere Lösung an, wenn es auch diese gibt. (2 BE)

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RS
	5	1	0	0	2	5	10
	1	0	1	0	0	2	1
	0	0	0	1	1	3	7
-z	0	0	0	0	-2	-1	-10

Aufgabe 3: 5 BE

Gegeben ist das folgende Optimierungsproblem:

$x_1 + 2x_2 - x_3 \leq 50$

$2x_1 - x_2 + x_3 \geq 70$

$x_1 + 8x_2 \leq 400$

$x_1, x_2, x_3 \geq 0$

$z = 7x_1 - 11x_2 + 3x_3 \rightarrow \min!$

Das folgende Tableau wurde vom Simplexverfahren bei der Bestimmung der optimalen Lösung ermittelt:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RS
	1/8	1	0	0	0	1/8	50
	23/8	0	0	1	-1	-1/8	70
	17/8	0	1	0	-1	1/8	120
-z	-2	0	0	0	-3	-1	-190

a) Geben Sie die optimale Lösung für die Variablen x_1, x_2, x_3 an! (1 BE)

b) Ermitteln Sie, in welchem Bereich der Koeffizient von x_2 in der Zielfunktion sein darf, ohne dass sich die optimale Lösung ändert. Begründen Sie Ihre Antwort durch entsprechende Rechnungen! (4 BE)

Aufgabe 4: 8 BE

Geben ist folgendes Optimierungsproblem:

$3\,x_1 \;-\; x_2 \geq 70$

$2\,x_1 \;+\; x_2 \;\leq 200$

$x_1, x_2 \;\geq 0$

$z = x_1 - 2\,x_2 \rightarrow \min!$

a) Geben Sie das äquivalente duale Problem in derselben Darstellungsweise an (also noch ohne zusätzliche Variablen, die im Lösungstableau benötigt werden). (3 BE)

b) Stellen Sie für das duale Problem ein Tableau auf, sodass der Simplexalgorithmus damit arbeiten kann! (5 BE)

Aufgabe 5: 8 BE

Demonstrieren Sie das Branch-and-Bound-Verfahren auf folgende Weise für die untenstehende Aufgabe:

a) Bestimmen Sie eine optimale Lösung mit dem normalen Simplexverfahren, welche auf die Ganzzahligkeit der Lösung keine Rücksicht nimmt. (5 BE)

b) Geben Sie dann die neuen Teilprobleme an, welche im nächsten Schritt mit dem normalen Simplexverfahren gelöst werden sollen. Diese müssen Sie nicht mehr weiter lösen. Für jedes Teilproblem sollen Sie alle (Un)gleichungen (nicht die Tableaus!) angeben, welche das normale Simplexverfahren berücksichtigen soll. (3 BE)

$x_1 + 2x_2 \leq 8$

$-x_1 + 2x_2 \leq 2$

$x_1, x_2 \in \mathbb{N}$

$z = x_2 \rightarrow \max!$

Aufgabe 6: 6 BE

Gegeben sei die folgende Optimierungsaufgabe:

Es ist Treibstoff von Depots d_1, d_2, d_3 zu Tankstellen t_1, t_2, t_3, t_4 zu transportieren.

Die Transportkosten sind die linken oberen Zahlen in jedem Feld: An Stelle (i,j) stehen die Kosten in EUR, die der Transport eines hl von d_i nach t_j kostet.

	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	
d_1	3 *60*	7	5	6 *40*	2	
d_2	6	3	4 *60*	3	8 *40*	
d_3	3	1 *60*	5	5 *20*	4 *20*	

Jedes Depot habe einen Vorrat von 100 hl und jede Tankstelle einen Bedarf von 60 hl.

Die kursiven Zahlen geben eine Lösung an: An Stelle (i,j) steht die Menge von Treibstoff, der von d_i nach t_j geliefert werden soll.

a) Berechnen Sie die Gesamtkosten dieses Transports. (1 BE)

b) Berechnen Sie mit der Stepping-Stone-Methode, ob es etwas bringt, Treibstoff von d_2 nach t_2 zu liefern. Falls es billiger wird, dann geben Sie einen neuen Belieferungsplan an, der die maximale Verbesserung nach dieser Methode für dieses Feld erreicht. (4 BE)

c) Überprüfen Sie die Lösung von b) durch die Angabe der neuen Gesamtkosten. (1 BE)