Bearbeitungszeit: 120 Minuten

Erlaubte Hilfsmittel: Taschenrechner

Bitte geben Sie Ihre Antworten ausschließlich auf diesem Aufgabenblatt. Bei Bedarf benutzen Sie die Rückseite des vorigen Blatts. Als Kladde steht ebenfalls die Rückseite zur Verfügung. Teile, die nicht gewertet werden sollen, sind durchzustreichen.

Es gibt insgesamt 50 Bewertungseinheiten (BE) zu erzielen. Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (2 BE)

Beweisen Sie durch Anwendung allgemeiner Logikregeln folgende Formel: $((p \vee q) \wedge \neg q) \rightarrow p$
Sie sollen die Zwischenschritte so angeben, dass Sie jeweils der Anwendung einer Regel (eines Gesetzes) entsprechen. Sie müssen das jeweilige Gesetz nicht explizit benennen.

Aufgabe 2 (5 BE)

Gegeben seien die folgenden Prädikate auf der Menge aller Menschen:

L(x,y): x liebt y

F(x): x spielt Flöte.

H(x,y): x hört y zu.

M(x): x spielt Mandoline.

Drücken Sie die folgenden Sachverhalte ausschließlich durch eine prädikatenlogische Verknüpfung dieser vier Prädikate aus. Insbesondere dürfen Sie nicht mit einschränkenden Definitionsbereichen für die Quantorvariablen arbeiten oder mit zusätzlichen Funktionen, die hier nicht definiert sind.

a) Amanda spielt Flöte, Brutus Mandoline und Cäsar beides.

b) Amanda liebt Brutus, sofern der ihr zuhört.

c) Amanda hört allen Mandolinisten zu, die auch Flöte spielen können.

Aufgabe 3 (3 BE)

Gegeben seien die folgenden Prädikate auf der Menge aller Menschen:

$L(x,y)$: x liebt y $\quad F(x)$: x spielt Flöte $\quad M(x)$: x spielt Mandoline

Beschreiben Sie jeweils in einem deutschen Satz, was die folgenden Aussagen bedeuten. Der Satz sollte so aufgeschrieben sein, dass er auch von Nichtmathematikern verstanden wird.

a) $\forall x \forall y : F(x) \wedge M(y) \rightarrow L(x,y)$

b) $\forall x \forall y : F(x) \wedge M(y) \wedge L(x,y)$

c) $\Big(\forall x \forall y : F(x) \wedge M(y) \rightarrow L(x,y)\Big) \rightarrow \Big(\forall z : F(z) \rightarrow M(z)\Big)$

Aufgabe 4 (5 BE)

Gegeben seien die folgenden Mengen A, B und C und als Universalmenge $\Omega = \{a,b,c,d,e,f,g,h\}$.

$A = \{a,b,c\}$ $\quad B = \{a,c,e,g\}$ $\quad C = \{d,e,f,g\}$

Geben Sie die Ergebnisse der folgenden Berechnungen als Mengen in Elementschreibweise oder als Wahrheitswerte an. Bei den Wahrheitswerten soll eine kurze Begründung gegeben werden. Tipp: Geben Sie für komplizierte Ausdrücke nicht gleich das Endergebnis, sondern Zwischenresultate an.

a) $\overline{(A \cup B) \cap (A \cup C)}$

b) $\overline{(A \cup B)} \cap \overline{(A \cup C)}$

c) $\Big(\overline{(A \cup B)} \cap \overline{(A \cup C)}\Big) \subseteq \Big(\overline{(A \cup B) \cap (A \cup C)}\Big)$

d) $A \setminus \overline{C}$

e) $\{\emptyset\} \subseteq (A \setminus \overline{C})$

Aufgabe 5 (5 + 1 BE)

Gegeben sei die Menge $M = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

a) Konstruieren Sie eine Äquivalenzrelation auf M, welche die Elemente $(1, 3)$ und $(3, 5)$ enthält, aber nicht die Elemente $(1, 2)$ und $(2, 4)$. Geben Sie nur die Äquivalenzklassen an. Die Elemente müssen Sie nicht angeben.

b) Konstruieren Sie eine totale Ordnungsrelation auf M, welche die Elemente $(1, 3)$ und $(3, 5)$ enthält, aber nicht die Elemente $(1, 2)$ und $(2, 4)$. Geben Sie nur das Hasse-Diagramm an. Die Elemente müssen Sie nicht angeben.

c) Konstruieren Sie eine partielle Ordnungsrelation auf M, welche die Elemente $(1, 3)$ und $(3, 5)$ enthält, aber nicht die Elemente $(1, 2)$ und $(2, 4)$ und welche mindestens 3 Elemente weniger enthält als die Lösung in b). Wer die minimale Lösung findet, bekommt noch einen Bonuspunkt. Geben Sie das Hasse-Diagramm und diesmal auch die Mengendarstellung (alle Elemente dieser Relation) an.

d) Konstruieren Sie eine bijektive Funktion $f : M \to M$, welche die Elemente $(1, 3)$ und $(3, 5)$ enthält, aber nicht die Elemente $(1, 2)$ und $(2, 4)$.
Die Darstellungsweise der Funktion ist Ihnen überlassen, sollte aber klar formuliert sein.

Aufgabe 6 (2 BE)

a) Geben Sie eine nicht bijektive Funktion $f : \{1, 2, 3\} \to \{a, b, c\}$ in Mengendarstellung an.

b) Gegeben sei eine Funktion $g : A \to B$, die injektiv ist, aber nicht bijektiv.
Was können Sie über das Verhältnis der Mengen A und B zueinander aussagen?

Aufgabe 7 (2 BE)

Betrachten Sie die Teiler-Algebra T_{42}:

a) Schreiben Sie alle Elemente dieser Algebra auf:

b) Demonstrieren Sie eine der beiden deMorganschen Regeln an den Elementen 3 und 7.

Aufgabe 8 (4 BE)

Zeigen Sie mit vollständiger Induktion: $\sum_{i=0}^{n} F_i = F_{n+2} - 1$
F_i ist hier die i-te Fibonaccizahl.

Aufgabe 9 (2 BE)

Es wird im Folgenden durch die Untereinanderschreibetechnik bewiesen, dass $2 = 1$ gilt:
Mit der dritten binomischen Formel gilt für eine beliebige Zahl x:

$$(x + x) \cdot (x - x) = x^2 - x^2$$
$$(x + x) \cdot (x - x) = x \cdot (x - x)$$
$$x + x = x$$
$$2x = x$$
$$2 = 1$$

Der Fehler in diesem Beweis besteht darin, dass nicht alle Umformungen Äquivalenzumformungen sind.
Geben Sie oben genau an, welche Umformung zwischen den Zeilen tatsächlich eine gültige Äquivalenzumformung <u>für alle x</u> ist und welche nur eine Implikation ist (mit Angabe der Richtung).

Aufgabe 10 (3 BE)

Bestimmen Sie den größten gemeinsamen Teiler von n und m mit Hilfe des Euklidischen Algorithmus für $n = 18073$ und $m = 5913157$.
Geben Sie auch das kleinste gemeinsame Vielfache von n und m an.

Aufgabe 11 (2 BE)

Betrachten Sie folgende Verknüpfungstafel:

$\odot$	a	b	c
a	a	c	b
b	c	b	a
c	b	a	c

Zeigen Sie, dass diese Struktur keine Gruppe ist, obwohl in jeder Zeile und Spalte jedes Element genau einmal vorkommt. Es reicht aus, dass Sie nur ein Axiom angeben, das verletzt ist. Hierfür reicht aber nicht der Name aus, sondern Sie sollen eine stichwortartige Begründung geben.

Aufgabe 12 (3 BE)

Untersuchen Sie, ob die Gruppen $(\mathbb{Z}_5^*, \odot_5)$ und $(\mathbb{Z}_{12}^*, \odot_{12})$ isomorph sind und begründen Sie Ihre Antwort. Geben Sie dafür die Verknüpfungstabellen explizit an.

Aufgabe 13 (5 BE)

a) Berechnen Sie das Polynom $(2x^4 + x^3 + 2x)$ modulo $(x^3 + 2x + 2)$ in $\mathbb{Z}_3[x]$.

b) Für welchen Körper ist diese Berechnung relevant?

c) Welche Bedingung muss erfüllt sein, damit Sie diese Rechnung hier zur Erstellung einer Multiplikationstabelle verwenden können? Ist diese Bedingung hier erfüllt? (Begründung!)

Aufgabe 14 (1 BE)

Welchen Koeffizienten hat der Term $a^3b^2c^5$ in $(a + b + c)^8$? Geben Sie die Begründung an.

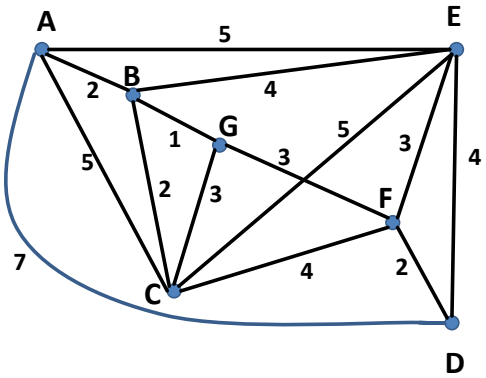
Aufgabe 15 (4 BE)

Zeichnen Sie im folgenden Graphen die Gerüste ein, die folgende Größen minimieren:

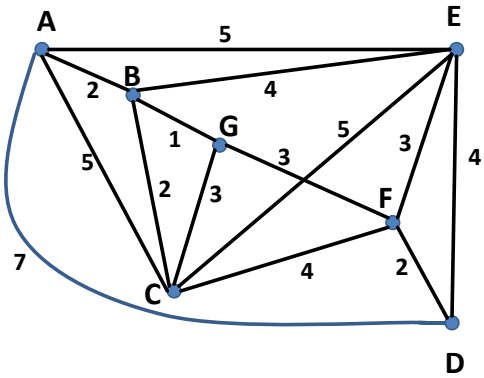
a) Gesamtlänge der Wege von A zu allen anderen Ecken (Dijkstra)

b) Gesamtlänge aller Kanten (Kruskal)

Berechnungen müssen Sie <u>nicht</u> durchführen.



15 a)

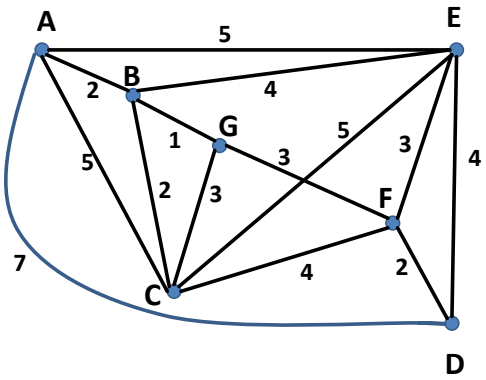


15 b)

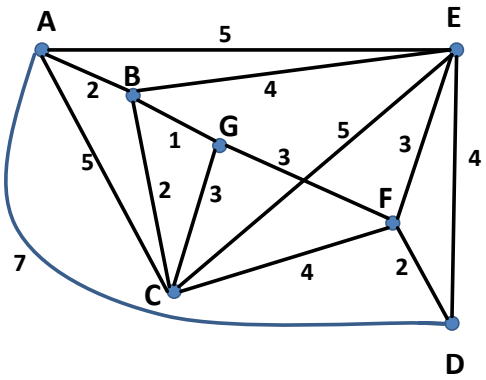
Aufgabe 16 (2 BE)

a) Begründen Sie, warum der Graph aus Aufgabe 15 nicht planar ist. Geben Sie den Teilgraphen, den Sie für diese Begründung brauchen, explizit an, indem Sie ihn in der Skizze unten eintragen. Benennen Sie ihn auch unter dem Graphen.

b) Zeigen Sie in der Skizze unten, warum die Ecken des Graphen dennoch mit 4 Farben zulässig gefärbt werden können. Begründen Sie in Worten, warum das kein Widerspruch zum 4-Farben-Satz ist.



16 a)



16 b)