Bearbeitungszeit: 120 Minuten

Erlaubte Hilfsmittel: Taschenrechner

Bitte geben Sie Ihre Antworten ausschließlich auf diesem Aufgabenblatt. Bei Bedarf benutzen Sie die Rückseite des vorigen Blatts. Als Kladde steht ebenfalls die Rückseite zur Verfügung. Teile, die nicht gewertet werden sollen, sind durchzustreichen.

Es gibt insgesamt 50 Bewertungseinheiten (BE) zu erzielen. Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (2 BE)

Beweisen Sie durch Äquivalenzumformungen, dass folgende Formeln äquivalent sind:

i) $(p \to q) \vee (r \to q)$ ii) $(p \wedge r) \to q$

Aufgabe 2 (4 BE)

Betrachten Sie die folgenden Prädikate. Es geht aus dem Text hervor, aus welchen Definitionsbereichen die Variablen stammen.

$G(x)$: Person x ist glücklich.

$B(x, y)$: Person x hat das Fach y bestanden.

$F(x, y)$: Person x ist mit Person y befreundet.

Drücken Sie jede Aussage der folgenden Sätze durch formale prädikatenlogische Formeln aus. Sie dürfen ausschließlich die obengenannten Prädikate, das Gleichheitsprädikat und bei Bedarf Quantoren benutzen:

a) Nicht jede Person, die das Fach DM bestanden hat, ist glücklich.

b) Wer mit einer anderen Person befreundet ist, ist glücklich.[1]

[1] Hinweis: Setzen Sie die Klammern richtig. Ein Quantor außerhalb einer Klammer gilt für die gesamte Formel dahinter.

Aufgabe 3 (2 BE)

Betrachten Sie die Prädikate aus der vorigen Aufgabe. Beschreiben Sie jeweils in einem deutschen Satz, was die folgenden Aussagen bedeuten. Der Satz sollte so aufgeschrieben sein, dass er auch von Nichtmathematikern verstanden wird. Zu wörtliche Übersetzungen bekommen Punktabzug!

a) $\forall x : \neg B(x, \mathrm{DM}) \rightarrow G(x)$

b) $\forall x : (\forall y : F(x, y) \leftrightarrow x = y) \rightarrow \neg G(x)$

Aufgabe 4 (4 BE)

Es sei die Universalmenge $\Omega = \{a, b, c, d, e, f\}$ gegeben und aus diesen Elementen die folgenden Mengen A, B und C:

$$A = \{a, b, c\}$$

$$B = \{c, d, e\}$$

$$C = \{e, f, a\}$$

Geben Sie im Folgenden das Ergebnis als Wahrheitswert bzw. Menge in Elementdarstellung an (je nachdem, von welchem Typ das Ergebnis ist). Im Fall eines Wahrheitswertes soll eine kurze Begründung abgegeben werden (zum Beispiel durch ein Zwischenergebnis)

a) $\overline{A \cap B \cap C}$

b) $(\overline{B} \setminus A) \subseteq C$

c) $\overline{B \setminus A} \cup (C \cap B)$

d) $(C \cap B) \in (B \times A)$

Aufgabe 5 (2 BE)

Die Mengenalgebra ist mit den Operationen Vereinigung, Durchschnitt und Komplement eine Boolesche Algebra.
Demonstrieren Sie eines der beiden Distributivgesetze anhand der Mengen A, B und C aus der vorigen Aufgabe. Geben Sie die Zwischenwerte an.

Aufgabe 6 (3 BE)

Entscheiden Sie, welche der folgenden Relationen auf der Menge aller Menschen *Äquivalenzrelationen*, *Halbordnungen* oder *totale Ordnungen* oder *nichts von dem* sind. Begründen Sie Ihre Antwort, indem Sie die wesentlichen Eigenschaften der genannten Relationstypen benennen und ob sie hier erfült sind. Es reicht aus, die minimale Menge von Eigenschaften zu nennen, welche die Relation eindeutig einem der genannten Typen zuordnet.

a) x und y haben beide Elternteile gemeinsam.

b) x und y haben genau ein Elternteil gemeinsam.

c) x ist ein direkter Vorfahre von y in der n-ten Generation[2] für irgendein $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Aufgabe 7 (3 BE)

Betrachten Sie die Mengen $M = \{1, 2\}$, $N = \{a, b, c\}$ und $P = \{3, 4\}$

Gegeben sei die Relation $f_1 = \{(1, a); (2, b); (1, c)\} \subseteq M \times N$.

a) Ist f_1 eine Funktion?
Begründen Sie Ihre Antwort.

b) Definieren Sie eine Funktion $f_2 : N \to P$ derart, dass die Komposition $f = f_2 \circ f_1$ eine bijektive Funktion zwischen M und P ist.
Geben Sie sowohl f_2 als auch f in Elementdarstellung an.

[2] Ein direkter Vorfahre von x in der 0-ten Generation ist die Person x selbst. Ein direkter Vorfahre von x in der n-ten Generation ist ein Elternteil eines direkten Vorfahrens von x in der $(n-1)$-ten Generation.

c) Ist f_2 injektiv oder surjektiv? Begründen Sie Ihre Antwort für beide Eigenschaften.

Aufgabe 8 (4 BE)

Beweisen Sie durch vollständige Induktion, dass jede zweite natürliche Zahl gerade sein muss.

Aufgabe 9 (2 BE)

Beweisen Sie die folgende Aussage indirekt:

Es gibt keine kleinste rationale Zahl, die größer als Null ist.

Aufgabe 10 (4 BE)

Bestimmen Sie den größten gemeinsamen Teiler von -204323 und 1907689 durch den Euklidischen Algorithmus. Geben Sie auch das kleinste gemeinsame Vielfache an.

Aufgabe 11 (2 BE)

Bestimmen Sie für das Element 204323 in $\mathbb{Z}_{1907689}$ das additiv und multiplikative Inverse (falls existent). Geben Sie eine Begründung ab, wenn es nicht existiert.[3]

Aufgabe 12 (3 BE)

Untersuchen Sie, ob unter den Gruppen $(\mathbb{Z}_{10}^*, \odot_{10})$, $(\mathbb{Z}_{12}^*, \odot_{12})$ und $(\mathbb{Z}_{14}^*, \odot_{14})$ irgendwelche 2 Gruppen isomorph sind und begründen Sie Ihre Antwort.

[3] Tipp: Hierfür können Sie das Ergebnis von Aufgabe 10 verwenden.

Aufgabe 13 (2 BE)

Arbeiten Sie in GF(9) mit folgender Benennung der Elemente (in Polynomdarstellung):

$$\begin{array}{cccccccccc} \{ & 0, & 1, & 2, & x, & x+1, & x+2, & 2x, & 2x+1, & 2x+2 \quad \} \\ & 0, & 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7, & 8 \end{array}$$

Benutzen Sie folgende Rechentabellen und bei Bedarf das irreduzible Polynom $x^2 + 1$:

$\oplus$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	2	0	4	5	3	7	8	6
2	2	0	1	5	3	4	8	6	7
3	3	4	5	6	7	8	0	1	2
4	4	5	3	7	8	6	1	2	0
5	5	3	4	8	6	7	2	0	1
6	6	7	8	0	1	2	3	4	5
7	7	8	6	1	2	0	4	5	3
8	8	6	7	2	0	1	5	3	4

$\odot$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
2	0	2	1	6	8	7	3	5	4
3	0	3	6	2	5	8	1	4	7
4	0	4	8	5	6	1	7	2	3
5	0	5	7	8	1	3	4	6	2
6	0	6	3	1	7	4	2	8	5
7	0	7	5	4	2	6	8	3	1
8	0	8	4	7	3	2	5	1	6

Geben Sie das Ergebnis der Berechnung $(2, 1) \oslash (1, 2)$ (Division von 2 Körperelementen in Vektordarstellung) an und überprüfen Sie das durch eine geeignete Polynommultiplikation. Führen Sie diese Polynommultiplikation in Einzelschritten vor.

Aufgabe 14 (2 BE)

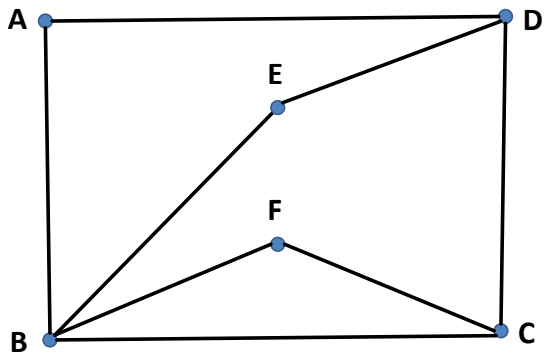
Schreiben Sie alle geraden Permutationen der Menge $\{1, 2, 3, 4\}$ auf.
Überlegen Sie sich erst einmal, wie viele das sein müssen, und geben Sie diese Zahl an.

Aufgabe 15 (3 BE)

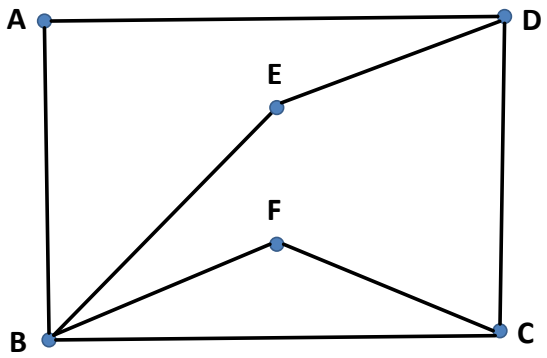
Untersuchen Sie den folgenden Graphen. Zeichnen Sie den jeweiligen Kreis oder Weg direkt im Graphen ein. Beantworten Sie jeweils für **beide** Fragen (Kreis und Weg), was gilt und was nicht, im Schreibfeld darunter. Wenn Ihre Antwort für a) negativ ist, müssen Sie das begründen. Für b) ist das nicht notwendig.

a) Gibt es einen Eulerkreis oder Eulerweg? Wenn ja, nummerieren Sie die Kanten im Graphen in der richtigen Reihenfolge für den Kreis oder Weg.

b) Gibt es einen Hamiltonkreis oder Hamiltonweg? Wenn ja, zeichnen Sie ihn ein.



15 a) Euler



15 b) Hamilton

Aufgabe 16 (6 BE)

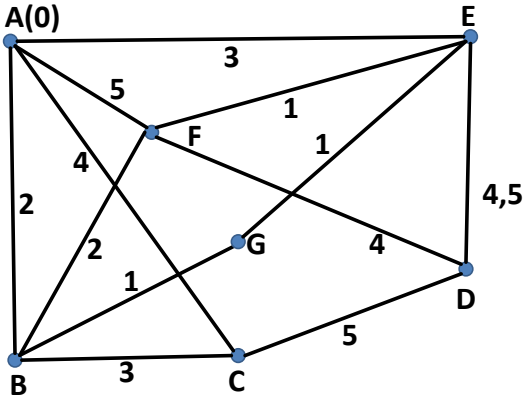
Zeichnen Sie die Gerüste ein, die folgende Größen minimieren, **direkt im nachfolgenden Graphen**. Notieren Sie bei **beiden** Gerüsten für **alle** Ecken die jeweilige Weglänge von A direkt hinter den Eckenbuchstaben im nachfolgenden Graphen. Für die Ecke A wurde das vorgemacht. Tragen Sie für **beide** Gerüste die jeweils geforderte Größe in das entsprechende Schreibfeld ein.

a) Gerüst zur Minimierung der Summe der Weglängen von A

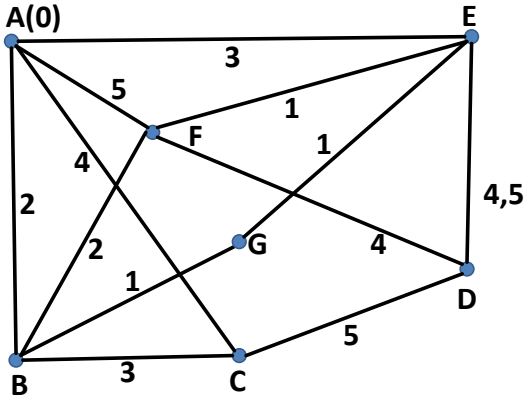
Summe der Weglängen von A: Summe der Kantenlängen:

b) Gerüst zur Minimierung der Summe aller Kantenlängen

Summe der Weglängen von A: Summe der Kantenlängen:



16 a)



16 b)

Aufgabe 17 (2 BE)

Zeichnen Sie einen Graphen, der nicht planar ist, aber dessen Ecken man mit 2 Farben färben kann. Geben Sie die Färbung an und begründen Sie, warum er nicht planar ist.

Bonusaufgabe (2 BE zusätzlich)

Geben Sie die minimale Färbungszahl für die Länder von Afrika **ohne Meer** an und begründen Sie Ihre Antwort (warum nicht mehr und warum nicht weniger).