Bearbeitungszeit: 120 Minuten

Erlaubte Hilfsmittel: Taschenrechner

Bitte geben Sie Ihre Antworten ausschließlich auf diesem Aufgabenblatt. Bei Bedarf benutzen Sie die Rückseite des vorigen Blatts. Als Kladde steht ebenfalls die Rückseite zur Verfügung. Teile, die nicht gewertet werden sollen, sind durchzustreichen.

Es gibt insgesamt 50 Bewertungseinheiten (BE) zu erzielen. Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (2 BE)

Im Folgenden sind 6 Aussagen über einen Aufenthaltsort angegeben. Ordnen Sie die Aussagen nach ihrer Stärke an, d.h. bilden Sie Ketten von Implikationen: Welche Aussage folgt aus welcher?
Hinweise: Es ist nicht möglich, alle Aussagen in einer Kette anzuordnen. Sie müssen mit mehreren Ketten arbeiten, die miteinander vernetzt sind. Versuchen Sie, möglichst lange Ketten zu bilden. Sie dürfen wie bei einem Hasse-Diagramm vorgehen, d.h. Sie müssen Implikationen nicht angeben (düfen aber), wenn sie sich aus der Hintereinanderschaltung von angegebenen Implikationen automatisch ergeben.

AHH: Ich befinde mich in Hamburg.

ASH: Ich befinde mich in Schleswig-Holstein.

ANS: Ich befinde mich in Niedersachsen.

A3L: Ich befinde mich in Hamburg oder Schleswig-Holstein oder Niedersachsen.

AD: Ich befinde mich in Deutschland.

A5: Ich befinde mich innerhalb der Hamburger Stadtgrenze oder maximal 5 km davon entfernt.

Aufgabe 2 (3 BE)

Betrachten Sie die folgenden Prädikate. Hierbei soll x für einen beliebigen Menschen stehen.

$F(x)$: x ist weiblich (soll gleichbedeutend sein mit x ist eine Frau).

$M(x)$: x ist männlich (soll gleichbedeutend sein mit x ist ein Mann).

$K(x, y)$: x ist ein Kind von y.

Drücken Sie jede Aussage der folgenden Sätze durch formale prädikatenlogische Formeln aus. Sie dürfen alle aussagenlogischen Operatoren benutzen. Als Prädikate dürfen Sie nur die oben genannten benutzen, das Gleichheitsprädikat sowie die neuen Prädikate, die Sie in den Aufgaben definieren:

a) V(x,y): x ist Vater von y.

b) S(x,y): x ist eine Schwester von y (Erklärung: Mindestens ein Elternteil gemeinsam, d.h. eine Halbschwester soll auch eine Schwester sein. Keine Person ist ihre eigene Schwester)

c) T(x,y): x ist eine Tante von y (Schwester eines Elternteils).

Aufgabe 3 (2 BE)

Betrachten Sie die Prädikate aus der vorigen Aufgabe. Beschreiben Sie jeweils in einem deutschen Satz, was die folgenden Aussagen bedeuten. Der Satz sollte so aufgeschrieben sein, dass er auch von Nichtmathematikern verstanden wird.

a) $\forall y \forall x : K(x,y) \rightarrow (M(x) \vee F(y))$

b) $\forall x \forall y : (\exists z \exists w : K(y,z) \wedge K(z,w) \wedge K(x,w) \wedge F(x) \wedge (x \neq z)) \leftrightarrow T(x,y)$

Aufgabe 4 (5 BE)

Gegeben seien die folgenden Mengen:

$A = \{\emptyset, 1, 2.3\}$ $B = \{0,1,2,3\}$ $C = \{\emptyset\}$

Die Universalmenge sei $\Omega = \{x \in \mathbb{N} \cup \{0\} : x \leq 4\} \cup \{\emptyset\}$
Geben Sie folgende Mengen in Elementschreibweise an bzw. bestimmen Sie den Wahrheitswert (nur eines ist pro Aufgabe möglich, je nach Operation). Im Falle, dass es ein Wahrheitswert ist, geben Sie eine stichwortartige Begründung an.

a) $A \cup B =$

b) $B \cap C =$

c) $A \subseteq B =$

d) $(B \cap C) \subseteq A =$

e) $\overline{A \cup B} =$

Aufgabe 5 (5 BE)

Gegeben sei die Menge $M = \{1, 3, 7, 21\}$.
Bilden Sie die Relation $R = \{(x, y) \in M \times M |\ x \text{ ist Teiler von } y\}$.

a) Begründen Sie, warum es sich bei R um eine Ordnungsrelation handelt. Ist es auch eine totale Ordnungsrelation? Begründen Sie auch das.

b) Zeichnen Sie das zugehörige Hassediagramm. Kennzeichnen Sie dort auch die maximalen und minimalen Elemente.

c) Ist R auch eine Äquivalenzrelation? Begründen Sie Ihre Antwort.

d) Begründen Sie, warum R keine Funktion ist.

Aufgabe 6 (5 BE)

Gegeben seien folgende Mengen und Relationen:

$A = \{1, 2\}$ $B = \{a, b, c\}$ $C = \{2, 3\}$

$R_1 = \{(1, a), (2, b), (1, c)\} \subseteq A \times B$

$R_2 = \{(a, 2); (b, 3); (c, 2)\} \subseteq B \times C$

a) Bilden Sie: $R_3 = R_2 \circ R_1 \subseteq A \times C$ Geben Sie die Elementdarstellung an.

b) Geben Sie für jede der 3 Relationen an, ob sie eine Funktion ist und begründen Sie Ihre Antwort.

c) Geben Sie ferner an, welche der 3 Relationen injektiv bzw. linkseindeutig und welche surjektiv bzw. rechtsvollständig ist. Geben Sie an, welche der Funktionen bijektiv ist.

Aufgabe 7 (2 BE)

Gegeben sind die zwei folgenden Elemente f und g der Menge der Booleschen Schaltfunktionen für n = 2 in Kurzschreibweise:

$$f(x_1, x_2) = (0, 1, 1, 0) \qquad g(x_1, x_2) = (1, 0, 1, 1)$$

a) Schreiben Sie die Funktion f in Mengendarstellung auf. Hierbei soll sich die Kurzschreibweise auf die folgende Reihenfolge der Argumente beziehen: $((0,0),(0,1),(1,0),(1,1))$.

b) Weisen Sie für beide Elemente eine der deMorganschen Regeln nach. Diese müssen Sie nur am Argument $(0,0)$ vorführen. Geben Sie jeweils die Zwischenwerte an!

Aufgabe 8 (4 BE)

Beweisen Sie für alle $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ durch vollständige Induktion: $\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2$

Aufgabe 9 (2 BE)

Beweisen Sie indirekt: *Es gibt keine größte reelle Zahl.*

Tipp: Sie dürfen für diesen Beweis benutzen, dass gilt $\forall x, y, z \in \mathbb{R} : x \leq y \Leftrightarrow x + z \leq y + z$

Aufgabe 10 (2 BE)

Bestimmen Sie den größten gemeinsamen Teiler von 8989 und 4343 mit Hilfe des Euklidischen Algorithmus.

Aufgabe 11 (4 BE)

Betrachten Sie die Struktur $(\mathbb{Z}_4, \odot_4)$, also die Restklasse modulo 4 mit der Multiplikation.

a) Stellen Sie die Operationstabelle auf.

b) Zeigen Sie an den Elementen 1, 2, 3, dass das Assoziativgesetz erfüllt ist.

c) Begründen Sie, warum diese Struktur keine Gruppe ist.

d) Definieren Sie eine Teilmenge dieser Struktur, welche mit denselben Operationen eine Gruppe ist.

Aufgabe 12 (4 BE)

Multiplizieren Sie die beiden Vektoren $(1, 0, 4)$ und $(0, 3, 2)$ im Primkörper $\mathbb{Z}_5$ über eine passende Körpermultiplikation.

a) Wie viele Elemente hat der Körper, in dem Sie diese Multiplikation durchführen müssen?

b) Wandeln Sie die Vektoren in entsprechende Polynome um und multiplizieren Sie diese mit Hilfe des irreduziblen Polynoms $x^3 + x + 1$. Geben Sie das Ergebnis aber wieder als Vektor aus.

c) Weisen die Irreduzibilität des verwendeten Polynoms nach.

Aufgabe 13 (2 BE)

Welchen Koeffizienten hat der Term $x^3x^4z^2$ in $(x+y+z)^9$?
Geben Sie die Rechnung und die sich daraus ergebende Zahl explizit an.

Aufgabe 14 (1 BE)

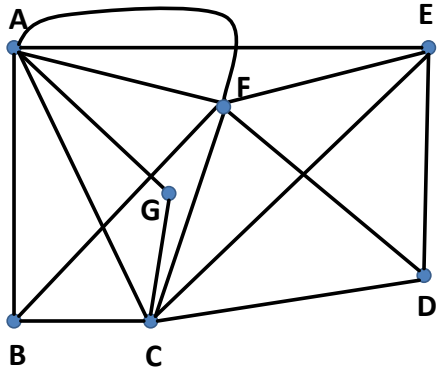
Gegeben sei die Permutation (2 1 12) (4 7 9) (6 10 3 5 8 11):
Ist die Permutation gerade oder ungerade? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 15 (3 BE)

Untersuchen Sie den folgenden Graphen (für diese und alle folgenden Aufgaben derselbe).

a) Gibt es einen Eulerkreis oder Eulerweg? Begründen Sie Ihe Antwort für beide Fragen. Auch im positiven Fall müssen Sie den Kreis oder Weg nicht angeben oder einzeichnen.

b) Gibt es einen Hamiltonkreis oder Hamiltonweg?
Wenn ja, zeichnen Sie ihn ein und geben Sie an, ob das ein Kreis oder ein Weg ist.
Wenn nein, begründen Sie das in Worten an diesem Graphen hier.

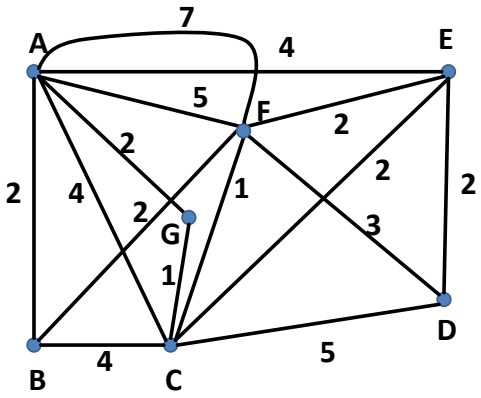


Aufgabe 16 (2 BE)

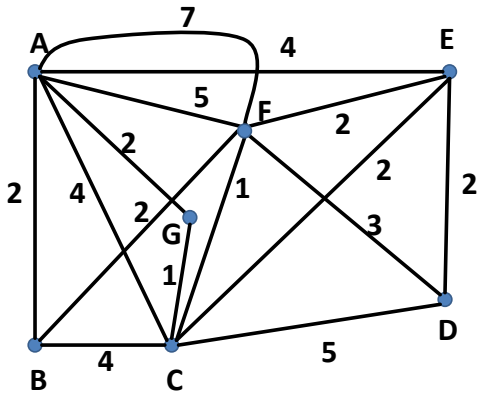
Zeichnen Sie die Gerüste ein, die folgende Größen minimieren (die Sie nicht ausrechnen müssen), **direkt im Graphen unten**.

a) Gesamtlänge aller Kanten (Kruskal)

b) Gesamtlänge der Wege von A zu allen anderen Ecken (Dijkstra)



16 a)

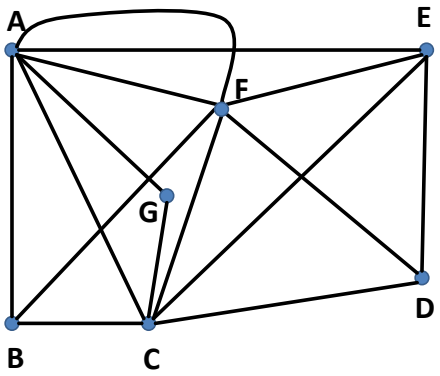


16 b)

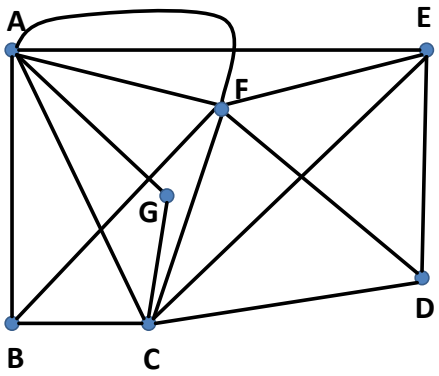
Aufgabe 17 (2 BE)

a) Ist der Graph planar? Begründen Sie Ihre Antwort.

b) Geben Sie eine minimale Färbung der Ecken an (Zahlen reichen aus) und begründen Sie im Schreibfeld darunter, warum es nicht mit weniger Farben geht.



17 a)



17 b)