Bearbeitungszeit: 120 Minuten

Erlaubte Hilfsmittel: Taschenrechner

Bitte geben Sie Ihre Antworten ausschließlich auf diesem Aufgabenblatt. Bei Bedarf benutzen Sie die Rückseite des vorigen Blatts. Als Kladde steht ebenfalls die Rückseite zur Verfügung. Teile, die nicht gewertet werden sollen, sind durchzustreichen.

Es gibt insgesamt 50 Bewertungseinheiten (BE) zu erzielen. Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (1 BE)

Betrachten Sie die folgende Aussagen und benennen Sie, welcher Sachverhalt notwendig für welchen anderen ist:

Wenn Romeo Julia liebt, dann ist Julia eine Frau.

Aufgabe 2 (2 BE)

Betrachten Sie die folgenden Prädikate. Hierbei soll x für einen beliebigen Menschen stehen.

$F(x)$: x ist weiblich (soll gleichbedeutend sein mit x ist eine Frau).

$M(x)$: x ist männlich (soll gleichbedeutend sein mit x ist ein Mann).

$L(x, y)$: x liebt y.

$Fr(x, y)$: x ist mit y befreundet.

Drücken Sie jede Aussage der folgenden Sätze durch formale prädikatenlogische Formeln aus. Sie dürfen ausschließlich die obengenannten Prädikate, die Konstanten Romeo und Julia, welche für bestimmte Menschen stehen, das Gleichheitsprädikat und bei Bedarf Variablen x oder y für Quantoren benutzen:

a) Unter allen Frauen liebt Romeo nur Julia.

b) Jeder Mensch liebt seine Freunde.

Aufgabe 3 (2 BE)

Betrachten Sie die Prädikate aus der vorigen Aufgabe. Beschreiben Sie jeweils in einem deutschen Satz, was die folgenden Aussagen bedeuten. Der Satz sollte so aufgeschrieben sein, dass er auch von Nichtmathematikern verstanden wird.

a) $L(\text{Romeo}, \text{Julia}) \rightarrow F(\text{Julia})$

b) $\forall x \forall y : (Fr(x,y) \wedge Fr(y,x)) \leftrightarrow (L(x,y) \wedge L(y,x))$

Aufgabe 4 (3 BE)

Geben Sie folgende Mengen in Elementschreibweise an:

a) $A = \{x \in \mathbb{N} \cup \{0\} : x < 3\} =$

b) $B = \{x \in \mathbb{N} \cup \{0\} : \exists y \in A : x^2 = y\} =$

c) $C = \{x \in \mathbb{N} \cup \{0\} : \exists y \in A : y^2 = x\} =$

Aufgabe 5 (3 BE)

Stellen Sie die folgenden Mengen in Elementschreibweise dar und beantworten Sie jeweils, ob die Menge $\emptyset$ eine Teilmenge oder ein Element der jeweiligen Menge ist (2 Antworten pro Menge):

a) $(\{1,2,3\} \cup \emptyset) \times \mathcal{P}(\emptyset) =$

b) $(\{1,2,3\} \times \emptyset) \cup \mathcal{P}(\emptyset) =$

Aufgabe 6 (5 BE)

Gegeben sei die Menge $M = \{a, b, c, d\}$.

a) Konstruieren Sie eine Äquivalenzrelation auf M, welche die Elemente (a, b) und (d, c) enthält, aber nicht das Element (a, c). Geben Sie die Relation in Elementdarstellung an.

b) Geben Sie die Äquivalenzklassen von a) an.

c) Konstruieren Sie eine totale Ordnungsrelation auf M, welche die Elemente (a, b) und (d, c) enthält, aber nicht das Element (a, c). Geben Sie die Relation in Elementdarstellung an.

d) Zeichnen Sie das Hasse-Diagramm von c) und kennzeichnen Sie alle minimalen und maximalen Elemente.

Aufgabe 7 (3 BE)

Betrachten Sie die Mengen $M = \{1, 2, 3, 4\}$ und $N = \{a, b, c\}$

Es sei $f : M \to N$ eine Funktion mit $f(1) = a$, $f(2) = a$.

a) Geben Sie weitere Funktionswerte an, so dass f alle Funktionseigenschaften erfüllt.

b) Schreiben Sie f als Relation (Teilmenge des Kreuzprodukts) in Elementdarstellung auf.

c) Können Sie f injektiv oder surjektiv machen? Begründen Sie Ihre Antwort für beide Eigenschaften.

Aufgabe 8 (3 BE)

Gegeben sei die Teiler-Algebra für $n = 15$.

a) Geben Sie diese Menge in Elementdarstellung an.

b) Wählen Sie zwei Elemente aus, die für keine der Booleschen Operationen die neutralen Elemente sind und demonstrieren Sie an diesen Elementen die Gültigkeit einer der deMorganschen Regeln. Geben Sie die Zwischenwerte an, um die Gleichheit der beiden Seiten von deMorgan zu zeigen.

Aufgabe 9 (4 BE)

Beweisen Sie für alle $n \in \mathbb{N}$ durch vollständige Induktion: $\sum_{i=0}^{n} 2^{-i} = 2 - \frac{1}{2^n}$

Aufgabe 10 (2 BE)

Finden Sie den Fehler in folgendem Induktionsbeweis:

Satz: Alle Katzen haben dieselbe Farbe.

Beweis: Sei $K(n)$ die Aussage, dass in jeder Menge von n Katzen alle Katzen dieselbe Farbe haben. Offensichtlich ist $K(1)$ wahr.
Im n-ten Induktionsschritt nehmen wir an, dass $K(n)$ wahr sei, und beweisen $K(n+1)$. Dazu betrachten wir eine beliebige Gruppe von $n+1$ Katzen. Schicken wir eine weg, so bleiben n Katzen übrig, die also alle die gleiche Farbe haben. Holen wir die Katze zurück und schicken eine andere weg, so bleiben wieder n Katzen übrig, die dann auch alle die gleiche Farbe haben. Da die in beiden Fällen nicht weggeschickten Katzen eine eindeutige Farbe haben, muss die Farbe für beide Gruppen von n Katzen dieselbe sein. Somit haben alle $n+1$ Katzen die gleiche Farbe.
Damit gilt $K(n)$ für alle n. q.e.d.

Benennen Sie auf der nächsten Seite klar den Fehler in dieser Argumentation. Gerne können Sie das durch eine Zeichnung illustrieren.

Aufgabe 11 (2 BE)

Testen Sie durch Probedivision, ob die folgenden Zahlen Primzahlen sind. Testen Sie keine überflüssigen Teilerkandidaten. Sie dürfen für die Probedivisionen einen Taschenrechner einsetzen. Geben Sie als Dokumentation ihrer Tests das Ergebnis an (Primzahl oder nicht) und nennen Sie alle Teiler, mit denen Sie die Probedivision durchgeführt haben.

a) 101

b) 1001

Aufgabe 12 (2 BE)

Untersuchen Sie, ob die Gruppen $(\mathbb{Z}_5^*, \odot_5)$ und $(\mathbb{Z}_4, \oplus_4)$ isomorph sind und begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 13 (2 BE)

Betrachten Sie folgende Verknüpfungstafel für eine Additionsgruppe:

$\oplus$	a	b	c	d	e	f
a	a	b	c	d	e	f
b	b	c	d	e	f	a
c	c	d	e	f	a	b
d	d	e	f	a	b	c
e	e	f	a	b	c	d
f	f	a	b	c	d	e

Wenn es möglich ist, erstellen Sie dazu eine geeignete Multiplikationstafel, sodass beide Tafeln zusammen einen Körper ergeben. Zeigen Sie das Distributivgesetz mit den Elementen b, c, d. Wenn das nicht möglich ist, dann begründen Sie das und zeigen Sie an der vorhandenen Tabelle das Assoziativgesetz mit den Elementen b, c, d.
Geben Sie bei der Demonstration des jeweiligen Gesetzes die Zwischenwerte an.

Aufgabe 14 (5 BE)

a) Berechnen Sie das Polynom $(3x^3 + 4x^2 + 2x)$ modulo $(x^2 + x + 4)$ in $\mathbb{Z}_5[x]$.

b) Wie viele Elemente hat der Körper, für den diese Division relevant sein kann?

c) Damit die Division für einen Körper relevant ist, muss eines der Polynome noch eine Bedingung erfüllen. Nennen Sie die Bedingung und prüfen Sie nach, ob sie hier erfüllt ist.

Aufgabe 15 (2 BE)

Gegeben sei die Permutation (2 3) (1 7 9) (4 8 6 5)

a) Schreiben Sie diese als Permutationstabelle auf.

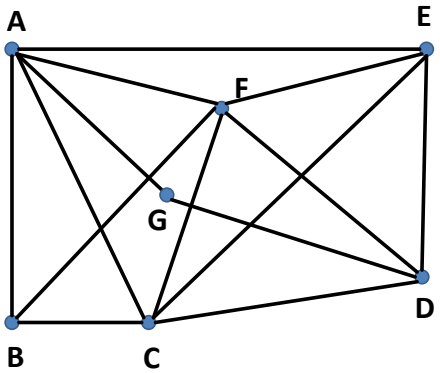
b) Ist die Permutation gerade oder ungerade? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 16 (3 BE)

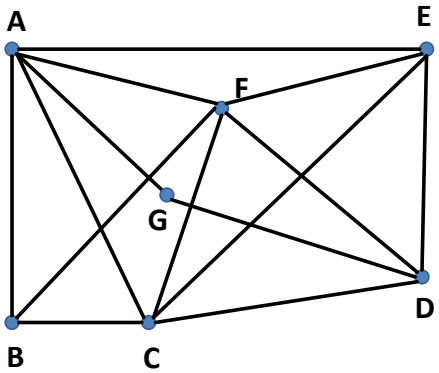
Untersuchen Sie den folgenden Graphen (für diese und alle folgenden Aufgaben derselbe). Zeichnen Sie den jeweiligen Kreis oder Weg direkt im Graphen ein. Beantworten Sie für beide Fragen, was gilt und was nicht, im Schreibfeld darunter. Wenn Ihre Antwort für a) negativ ist, müssen Sie das begründen. Für b) ist das nicht notwendig.

a) Gibt es einen Eulerkreis oder Eulerweg? Wenn ja, nummerieren Sie die Kanten in der richtigen Reihenfolge für den Kreis oder Weg.

b) Gibt es einen Hamiltonkreis oder Hamiltonweg? Wenn ja, zeichnen Sie ihn ein.



16 a) Euler



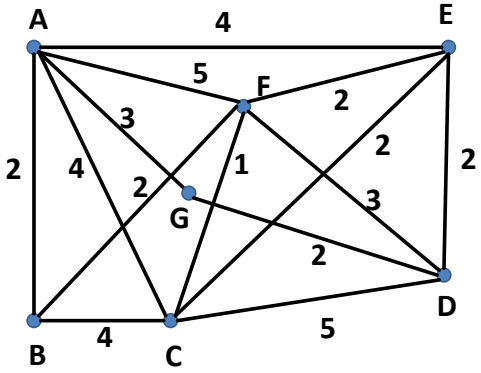
16 b) Hamilton

Aufgabe 17 (4 BE)

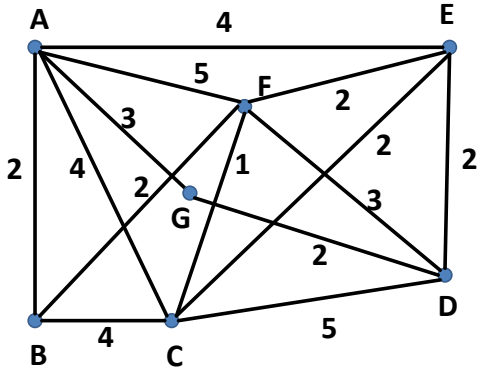
Zeichnen Sie die Gerüste ein, die folgende Größen minimieren (die Sie nicht ausrechnen müssen), **direkt im Graphen unten**. Erwähnen Sie neben der Aufgabenstellung, welche durch den Algorithmus von Dijkstra und welche durch den von Kruskal gelöst wird.

a) Gesamtlänge aller Kanten, gelöst durch den Algorithmus von

b) Gesamtlänge der Wege von A zu allen anderen Ecken, Algorithmus von



17 a)

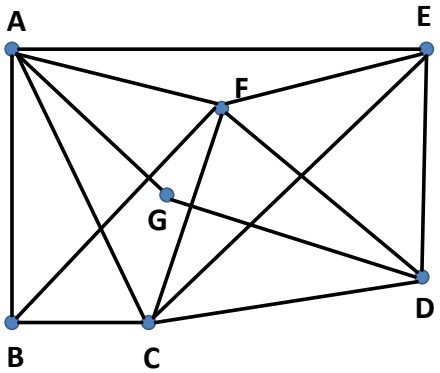


14 b)

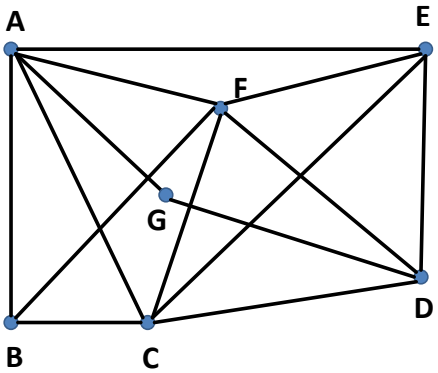
Aufgabe 18 (2 BE)

a) Zeichnen Sie die Struktur ein, weswegen der Graph nicht planar ist und benennen Sie diese im Schreibfeld darunter.

b) Geben Sie eine minimale Färbung der Ecken an (Zahlen reichen aus) und begründen Sie im Schreibfeld darunter, warum es nicht mit weniger Farben geht.



18 a)



18 b)