Bearbeitungszeit: 120 Minuten

Erlaubte Hilfsmittel: Taschenrechner

Bitte geben Sie Ihre Antworten ausschließlich auf diesem Aufgabenblatt. Bei Bedarf benutzen Sie die Rückseite des vorigen Blatts. Als Kladde steht ebenfalls die Rückseite zur Verfügung. Teile, die nicht gewertet werden sollen, sind durchzustreichen.

Es gibt insgesamt 50 Bewertungseinheiten (BE) zu erzielen. Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (3 BE)

Gegeben seien die folgenden Prädikate auf der Menge aller Menschen:

L(x,y): x liebt y F(x): x ist Flötist(in).
K(x,y): x kennt y M(x): x ist Mathematiker(in).

Drücken Sie die folgenden Sachverhalte ausschließlich durch eine prädikatenlogische Verknüpfung dieser vier Prädikate aus. Insbesondere dürfen Sie nicht mit einschränkenden Definitionsbereichen für die Quantorvariablen arbeiten oder mit zusätzlichen Funktionen, die hier nicht definiert sind.

a) Anna ist Flötistin, Bernd Mathematiker und Erwin beides.

b) Anna kennt Bernd, liebt ihn aber nicht.

c) Anna liebt alle Flötisten, solange sie nicht auch Mathematiker sind.

Für die folgende Frage erhalten Sie 2 Bonuspunkte. Sie gehört nicht zur offiziellen Klausur.

d) Erwin kennt nur Flötisten, die auch Mathematiker sind.

Aufgabe 2 (4 BE)

Gegeben seien die folgenden Prädikate auf der Menge aller Menschen:

$L(x,y)$: x liebt y $F(x)$: x ist Flötist(in) $M(x)$: x ist Mathematiker(in)

Beschreiben Sie jeweils in einem deutschen Satz, was die folgenden Aussagen bedeuten. Der Satz sollte so aufgeschrieben sein, dass er auch von Nichtmathematikern verstanden wird.

a) $\forall x : M(x) \rightarrow L(x,x)$

b) $\forall x : M(x) \land L(x,x)$

c) $\forall x \forall y : \Big(F(x) \land M(y) \land L(x,y)\Big) \to \Big(\forall z : F(z) \to L(y,z)\Big)$

d) $\forall x \forall y : \Big(F(x) \land M(y) \land L(x,y)\Big) \to \Big(\forall z : L(y,z)\Big)$

Aufgabe 3 (3 BE)

Geben Sie folgende Mengen in Elementschreibweise an:

a) $A = \{x \in \mathbb{N} \cup \{0\} : x < 6\} =$

b) $B = \{x \in \mathbb{N} : \exists y \in A : 3 \cdot x = y\} =$

c) $C = \{x \in \mathbb{N} : \exists y \in A : 3 \cdot y = x\} =$

Aufgabe 4 (5 BE)

Jede der folgenden Bedingungen definiert eine Relation auf $\mathbb{Z}$. Entscheiden Sie jeweils, ob die Relation eine Äquivalenzrelation oder eine (partielle) Ordnungsrelation oder nichts von beiden ist. Wenn Sie sich für Ordnungsrelation entscheiden, müssen Sie nicht festlegen, ob sie partiell oder total ist. Sie müssen jeweils sowohl für die Äquivalenzrelation als auch für die Ordnungsrelation angeben, ob diese vorliegen, und das kurz begründen.

a) $x \sim y \;\Leftrightarrow\; x + y$ ist eine gerade ganze Zahl (3 BE)

b) $x \sim y \;\Leftrightarrow\; x + y$ ist eine ungerade ganze Zahl (1 BE)

c) $x \sim y \Leftrightarrow xy$ ist eine ungerade ganze Zahl (1 BE)

Aufgabe 5 (6 BE)

Gegeben sei die Menge $M = \{1, 2, 3, 6, 7, 14, 42\}$.

Betrachten Sie die Relation $R = \{(x, y) \in M \times M | \ x \text{ ist Teiler von } y\}$

a) Untersuchen Sie, ob R eine Äquivalenzrelation oder Ordnungsrelation (partiell oder total, genau angeben!) ist.

b) Geben Sie gegebenenfalls die Äquivalenzklassen oder das Hasse-Diagramm an.

c) Begründen Sie, warum R keine Funktion ist.

Aufgabe 6 (2 BE)

a) Geben Sie eine Funktion $f : \{1, 2, 3\} \to \{a, b, c\}$ **in Mengendarstellung** an, die nicht bijektiv ist.

b) Gegeben eine Funktion $g : A \to B$, die injektiv ist, aber nicht bijektiv. Was können Sie über das Verhältnis der Mengen A und B zueinander aussagen?

Aufgabe 7 (4 BE)

Zeigen Sie mit vollständiger Induktion (F_i ist hier die i-te Fibonaccizahl):

$$\sum_{i=0}^{n} F_i^2 = F_n \cdot F_{n+1}$$

Aufgabe 8 (2 BE)

Beweisen Sie indirekt: Ein Dreieck, in dem ein Innenwinkel 100° beträgt, kann keinen rechten Winkel enthalten.

Aufgabe 9 (3 BE)

Bestimmen Sie den größten gemeinsamen Teiler von n und m mit Hilfe des Euklidischen Algorithmus für $n = 206753$ und $m = 166897$.
Geben Sie auch das kleinste gemeinsame Vielfache von n und m an.

Aufgabe 10 (3 BE)

Untersuchen Sie, ob die Gruppen $(\mathbb{Z}_8^*, \odot_8)$ und $(\mathbb{Z}_{10}^*, \odot_{10})$ isomorph sind und begründen Sie Ihre Antwort. Geben Sie dafür die Verknüpfungstabellen explizit an.

Aufgabe 11 (2 BE)

Betrachten Sie folgende Verknüpfungstafel:

$\odot$	1	2	3	4
1	1	3	2	4
2	4	2	3	1
3	2	1	4	3
4	3	4	1	2

Zeigen Sie an jeweils einem Beispiel, dass in dieser Struktur das Assoziativgesetz und das Kommutativgesetz verletzt sind.

Aufgabe 12 (4 BE)

a) Geben Sie alle Elemente aus GF(9) in Polynomschreibweise an. (1 BE)

b) Finden Sie ein geeignetes irreduzibles Polynom und weisen Sie die Irreduzibilität explizit nach. (1 BE)

c) Berechnen Sie mit Hilfe dieses irreduziblem Polynoms $(x + 1) \cdot (2x + 1)$. (2 BE)

Aufgabe 13 (2 BE)

Welchen Koeffizienten hat der Term $a^3bc^4d^2$ in $(a+b+c+d)^{10}$? Geben Sie die Rechnung an.

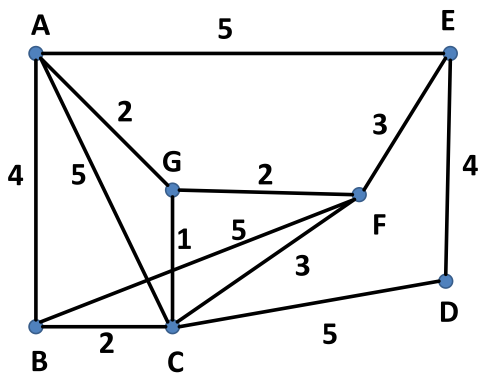
Aufgabe 14 (5 BE)

Zeichnen Sie im folgenden Graphen die Gerüste ein, die folgende Größen minimieren:

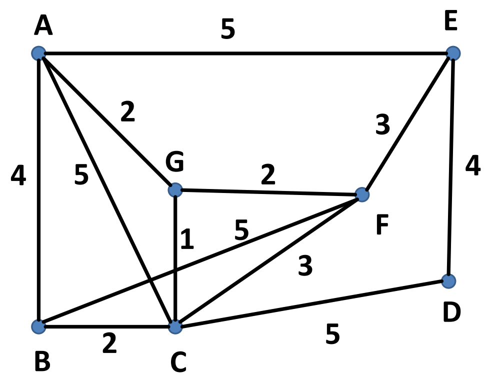
a) Gesamtlänge der Wege von A zu allen anderen Ecken (Dijkstra)

b) Gesamtlänge aller Kanten (Kruskal)

Berechnen Sie für beide Gerüste die Gesamtlänge aller Wege von A sowie die Gesamtlänge aller Kanten.



14 a)



14 b)

Aufgabe 15 (2 BE)

Begründen Sie, warum der Graph aus Aufgabe 14 nicht planar ist. Geben Sie den Teilgraphen, den Sie für diese Begründung brauchen, explizit an. Sie können ihn hier skizzieren: