

Bearbeitungszeit: 120 Minuten

Erlaubte Hilfsmittel: Taschenrechner

Bitte notieren Sie Ihre Antworten ausschließlich auf diesem Aufgabenblatt. Bei Bedarf benutzen Sie die Rückseite des vorigen Blatts. Als Kladde steht ebenfalls die Rückseite zur Verfügung. Teile, die nicht gewertet werden sollen, sind durchzustreichen.

Es gibt insgesamt 50 Bewertungseinheiten (BE) zu erzielen. Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (2 BE)

Beweisen Sie das logische Prinzip des vereinfachten indirekten Beweises mit einer Wahrheitstafel:

$$\neg p \rightarrow p \implies p$$

Begründen Sie, warum Sie eine schärfere Aussage bewiesen haben als nötig.

Aufgabe 2 (4 BE)

Betrachten Sie die folgenden Prädikate:

$H(x)$: x ist glücklich.

$F(x)$: x ist weiblich.

$L(x, y)$: x liebt y.

Drücken Sie jede Aussage der folgenden Sätze durch formale prädikatenlogische Formeln aus. Sie dürfen ausschließlich die obengenannten Prädikate, die Konstanten Anna und Bernd, das Gleichheitsprädikat und bei Bedarf Variablen x oder y für Quantoren benutzen:

- a) Anna ist glücklich.

- b) Anna ist glücklich, wenn Bernd sie liebt.

- c) Anna ist nur glücklich, wenn Bernd sie liebt.

Aufgabe 3 (4 BE)

Gegeben seien die folgenden Prädikate auf der Menge aller Menschen:

- $L(x,y)$: x liebt y
- $F(x)$: x ist weiblich
- $M(x)$: x ist männlich

Beschreiben Sie in einem deutschen Satz, was die folgenden Aussagen bedeuten:

a) $\exists x : M(x) \wedge \neg \exists y : F(y) \wedge L(y, x)$

b) $\exists x \exists y : M(x) \wedge F(y) \wedge L(y, x)$

c) $\exists x \forall y : M(x) \wedge (\neg F(y) \vee L(y, x))$

d) $\forall y \exists x : M(x) \wedge (\neg F(y) \vee L(y, x))$

Aufgabe 4 (3 BE)

Es sei die folgende Universalmenge $\Omega = \{p, q, r, s, t, u, v\}$ gegeben.

Gegeben seien die folgenden Mengen A , B und C :

$$A = \{p, q, r\}$$

$$B = \{r, t\}$$

$$C = \{r, s, t, u\}$$

Geben Sie die Elemente der folgenden Mengen an:

a) $(B \setminus C) =$

b) $(A \setminus (B \setminus C)) =$

c) $\overline{(A \setminus (B \setminus C))} =$

Aufgabe 5 (5 BE)

Gegeben sei die Menge $M = \{1, 2, 3, 4\}$

- Konstruieren Sie eine Äquivalenzrelation auf M , welche die Elemente $(1, 2)$ und $(4, 3)$ enthält, aber nicht das Element $(2, 3)$. Geben Sie die Äquivalenzrelation in Elementdarstellung an.
- Geben Sie die Äquivalenzklassen von a) in Elementdarstellung an (nicht als Mengendiagramme).
- Konstruieren Sie eine totale Ordnungsrelation auf M , welche die Elemente $(1, 2)$ und $(4, 3)$ enthält, aber nicht das Element $(4, 2)$. Geben Sie die Ordnungsrelation in Elementdarstellung an.
- Zeichnen Sie das Hasse-Diagramm von c).

Aufgabe 6 (2 BE)

Beweisen Sie für die Teiler-Algebra für $n = 42$ die Gültigkeit eine der deMorganschen Regeln für die Elemente 3 und 6, indem Sie die Regel für diese Elemente mit Angabe der Zwischenwerte aufschreiben.

Aufgabe 7 (4 BE)

Gegeben sei folgende Produktionsregel zur Bildung von Variablenamen:

$$\vec{x} \in \text{Varname} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{x} = \alpha\beta & \text{für } \alpha \in \{a, b, c, \dots, z\}, \beta \in \{A, B, C, \dots, Z\} \\ \vec{x} = \vec{y}\vec{z} & \text{für } \vec{y}, \vec{z} \in \text{Varname} \end{cases}$$

Sei n die Länge eines gültigen Variablenamens.

Beweisen Sie mit vollständiger Induktion über n die folgende Aussage (nächste Seite):

Jeder Variablenname beginnt mit einem Kleinbuchstaben.

Aufgabe 8 (4 BE)

Testen Sie durch Probedivision, ob es sich bei den folgenden Zahlen um Primzahlen handelt. Geben Sie das Ergebnis an und mit welchen Teilerkandidaten Sie konkret getestet haben. Testen Sie keine überflüssigen Teilerkandidaten.

a) 1021

b) 2021

	2	3	5	7	11	13	17	19	23
29	31	37	41	43	47	53	59	61	67
71	73	79	83	89	97	101	103	107	109
113	127	131	137	139	149	151	157	163	167
173	179	181	191	193	197	199	211	223	227
229	233	239	241	251	257	263	269	271	277
281	283	293	307	311	313	317	331	337	347
349	353	359	367	373	379	383	389	397	401
409	419	421	431	433	439	443	449	457	461
463	467	479	487	491	499	503	509	521	523
541	547	557	563	569	571	577	587	593	599
601	607	613	617	619	631	641	643	647	653
659	661	673	677	683	691	701	709	719	727
733	739	743	751	757	761	769	773	787	797
809	811	821	823	827	829	839	853	857	859
863	877	881	883	887	907	911	919	929	937
941	947	953	967	971	977	983	991	997	

Hier sind die Primzahlen bis 1000:

Aufgabe 9 (3 BE)

Geben Sie die Verknüpfungstabelle von \odot für die prime Restklassengruppe \mathbb{Z}_{12}^* an. Geben Sie außerdem für jedes Element seine Ordnung und sein Inverses an.

Aufgabe 10 (3 BE)

Untersuchen Sie, ob es zu den folgenden Zahlen einen Körper mit dieser Anzahl von Elementen gibt. Falls ja, geben Sie die Elemente in Vektorschreibweise an. Falls nein, begründen Sie Ihre Antwort.

a) 16

b) 26

Aufgabe 11 (6 BE)

a) Berechnen Sie das Polynom $(3x^4 + 4x^3 + 2x)$ modulo $(x^2 + x + 4)$ in $\mathbb{Z}_5[x]$. Nachdem Sie die Polynomdivision durchgeführt haben, schreiben Sie alle beteiligten Polynome als Vektoren auf.

b) Geben Sie an, für welchen Körper die Berechnung aus a) relevant sein könnte und untersuchen Sie, ob die Berechnung dort wirklich zum Einsatz kommen kann.

Aufgabe 12 (2 BE)

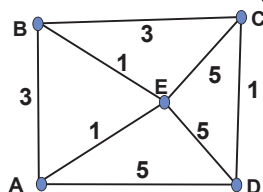
Bilden Sie die Tabelle der Gruppe (A_3, \circ) , der Menge der geraden Permutationen der Elemente 1, 2, 3 mit ihrer Hintereinanderschaltung.

Aufgabe 13 (5 BE)

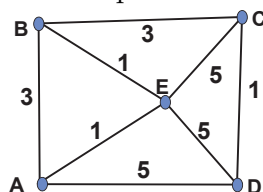
Zeichnen Sie im abgebildeten Graphen (sind alle gleich) die Gerüste ein, die durch die Anwendung folgender Algorithmen entstehen:

- a) Dijkstra für den Startpunkt A b) Kruskal

Berechnen Sie die Gesamtlänge der Wege von A (i) sowie die Gesamtlänge aller Kanten (ii) für beide Gerüste und vergleichen Sie die jeweiligen Zahlen: Welches Gerüst ist optimal für was?



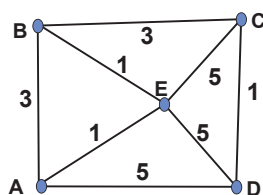
13 a)



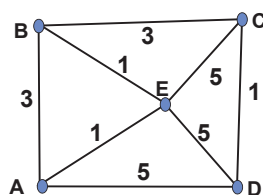
13 b)

Aufgabe 14 (3 BE)

- a) Fügen Sie im abgebildeten Graphen eine minimale Anzahl von Kanten hinzu, sodass er nicht mehr planar ist. Begründen Sie, warum das nicht mit weniger Kanten geht.
- b) Färben Sie die Ecken des Graphen mit einer minimalen Zahl von Farben derart, dass keine zwei mit derselben Farbe benachbart sind. Begründen Sie, warum es nicht mit weniger Farben geht.



14 a)



14 b)