Fachhochschule Wedel 17.08.2020

Prof. Dr. Sebastian Iwanowski

DM

Aufgaben zur Klausur in *Diskrete Mathematik* (SS 2020)

Studiengänge:

B_Inf, B_TInf, B_ITE, B_STec, B_Minf, B_CGT, B_WInf, B_ECom, B_IMCA, Übergangsblock für Masterstudiengänge

Zeit: 120 Minuten,

erlaubte Hilfsmittel: Taschenrechner

Bitte tragen Sie Ihre Antworten und eindeutig gekennzeichneten Lösungen ausschließlich an den freien Stellen nach den jeweiligen Aufgaben ein (ggf. auf der freien Seite gegenüber weiterschreiben). Nebenrechnungen können ebenfalls auf der freien Seite gegenüber durchgeführt werden. Falls sie nicht gewertet werden sollen, bitte durchstreichen!

Diese Klausur besteht einschließlich dieses Deckblatts aus 8 Seiten.

Für die Klausur werden insgesamt 60 Bewertungseinheiten (BE) vergeben. Zum Bestehen benötigen Sie mindestens 30 BE.

Viel Erfolg !

1. Aufgabe (6 BE)

Gegeben seien die folgenden Prädikate auf der Menge aller Menschen:

- L(x,y): x liebt y
- V(x,y): x ist mit y verheiratet
- G(x,y): x ist gleich y

Drücken Sie die folgenden Sachverhalte ausschließlich durch eine prädikatenlogische Verknüpfung dieser drei Prädikate aus! Insbesondere dürfen Sie nicht mit einschränkenden Definitionsbereichen für die Quantorvariablen arbeiten oder mit zusätzlichen Funktionen, die hier nicht definiert sind.

a) Nur Anna liebt Bernd. (2 BE)

b) Miteinander verheiratet zu sein beruht auf Gegenseitigkeit. (2 BE)

c) Jeder Mensch hat höchstens einen Ehepartner. (2 BE)

2. Aufgabe (3 BE)

Gegeben seien die folgenden Prädikate auf der Menge aller Menschen:

L(x,y) : x liebt y   F(x) : x ist weiblich   M(x) : x ist männlich

Beschreiben Sie in jeweils einem deutschen Satz, was die folgenden Aussagen bedeuten:

a) $\forall x : M(x) \rightarrow L(x,x)$ (1 BE)

b) $\forall x : M(x) \land L(x,x)$ (1 BE)

c) $\forall x \forall y : (F(x) \land M(y) \land L(x,y)) \rightarrow \exists\, z: L(y,z) \land (z \neq y)$ (1 BE)

3. Aufgabe (4 BE)

Geben Sie die folgenden Mengen in Elementschreibweise an:

a) ({1,2} x {3}) x {4}

b) {1,2} x ({3} x {4})

c) Potenzmenge ({1,2} x ({3}) x {4})) (für Ihr Ergebnis von b)

d) {1,2} x {3,4}

4. Aufgabe (10 BE)

Gegeben sei die Menge M = {1, 2, 3, 4, 6, 12}.

Betrachten Sie die Relation R = {(x, y) ∈ M x M | x ist Teiler von y}

a) Geben Sie R in Elementschreibweise an. (2 BE)

b) Geben Sie an, ob R zu den im Folgenden aufgeführten Relationstypen gehört und begründen Sie jeweils Ihre Antwort. (4 BE)

Äquivalenzrelation:

partielle Ordnungsrelation:

totale Ordnungsrelation:

c) Geben Sie gegebenenfalls die Äquivalenzklassen oder das Hasse-Diagramm an. (2 BE)

d) Begründen Sie, warum R keine Funktion auf M ist, und geben Sie eine Teilmenge R‘ von R an, die eine Funktion auf M ist. (2 BE)

5. Aufgabe (4 BE)

Gegeben seien die Mengen M = {1, 2, 3, 4, 5} und N = {a, b, c, d, e}.

a) Geben Sie eine Funktion f: M → N an, die nicht bijektiv ist. (2 BE)

b) Gegeben eine Funktion g : A → B, die injektiv ist, aber nicht bijektiv. A und B sollen gleichmächtig sein. Was können Sie noch über die Mächtigkeit von A und B aussagen? Begründen Sie Ihre Antwort und geben Sie ein Beispiel für solche Mengen und eine solche Funktion an. (2 BE)

6. Aufgabe (4 BE)

Zeigen Sie mit vollständiger Induktion:

$$\sum_{i=1}^{n} F_i^2 = F_n \cdot F_{n+1}$$

F_i ist hier die i-te Fibonaccizahl.

7. Aufgabe (3 BE)

Beweisen Sie die folgenden Aussagen direkt. Sie müssen die Implikationspfeile, die Sie für den Beweis brauchen, explizit angeben. Sie dürfen nicht mit Äquivalenzpfeilen arbeiten, auch wenn in Ihrer Umformung die Äquivalenz gilt. Sie dürfen nur die Pfeilrichtung angeben, die Sie für den jeweiligen Beweis brauchen.
Warnung: Wenn Sie umgeformte Terme ganz ohne Implikationspfeile unter- oder nebeneinander schreiben, dann bekommen Sie überhaupt keine Zwischenpunkte.

a) Für die Gleichung $2x = 3x + 5$ kann es keine andere Lösung geben als $x = -5$.

b) Für die Gleichung $2x = 3x + 5$ ist $x = -5$ eine gültige Lösung.

8. Aufgabe (3 BE)

Testen Sie durch Probedivision, ob die folgenden Zahlen Primzahlen sind:

299, 691, 1501

Testen Sie keine überflüssigen Teilerkandidaten.

Geben Sie bei den Nichtprimzahlen an, warum sie keine sind und geben Sie bei den Primzahlen an, mit welchen Teilern Sie diese untersucht haben.

9. Aufgabe (3 BE)

Betrachten Sie folgende Verknüpfungstafel:

$\odot$	1	2	3	4
1	1	3	2	4
2	4	2	3	1
3	2	1	4	3
4	3	4	1	2

Zeigen Sie, dass diese Struktur keine Gruppe ist, obwohl in jeder Zeile und Spalte jedes Element genau einmal vorkommt. Geben Sie an, welche Gruppenaxiome verletzt sind und begründen Sie jede Verletzung durch eine Beobachtung oder durch ein Beispiel.

10. Aufgabe (6 BE)

Betrachten Sie die Gruppentafel von GF(8):

$\cdot$	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7
2	0	2	4	6	3	1	7	5
3	0	3	6	5	7	4	1	2
4	0	4	3	7	6	2	5	1
5	0	5	1	4	2	7	3	6
6	0	6	7	1	5	3	2	4
7	0	7	5	2	1	6	4	3

Elemente: $\{0,\ 1,\ x,\ x+1,\ x^2,\ x^2+1,\ x^2+x,\ x^2+x+1\}$

0, 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 7

a) Schreiben Sie die Elemente dieser Gruppentafel in den Zeilen und Spalten in einer solchen Reihenfolge auf, dass man auf den ersten Blick sieht, dass die Gruppentafel zyklisch ist. (3 BE)

b) Begründen Sie das Ergebnis von 5 • 3: Geben Sie hierfür ein irreduzibles Polynom an, weisen Sie die Irreduzibilität nach und rechnen Sie dann das Ergebnis der Multiplikation aus. (3 BE)

11. Aufgabe (4 BE)

Gegeben sei die Permutation (2 5 4 3)(1 6).

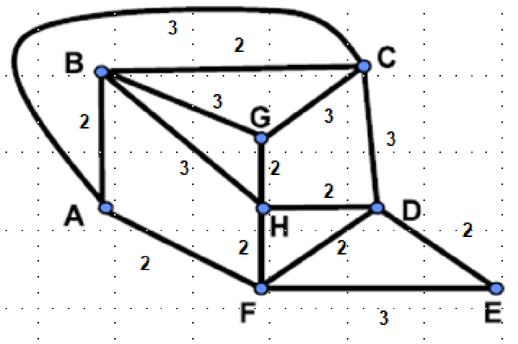
a) Schreiben Sie die Permutationen als Tabelle auf. (1 BE)

b) Geben Sie eine minimale Zerlegung in Transpositionen an. (1 BE)

c) Verknüpfen Sie die Permutation mit (2 5 4)(3 1 6) in beiden Reihenfolgen. (2 BE)

12. Aufgabe (10 BE)

a) Finden Sie im folgenden Graphen einen Weg des gefragten Typs. Geben Sie im positiven Fall die Ecken in der richtigen Reihenfolge an und im negativen einen Satz, warum das nicht möglich ist. (5 BE)

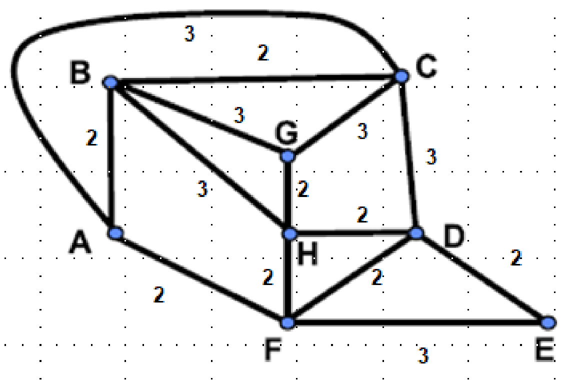


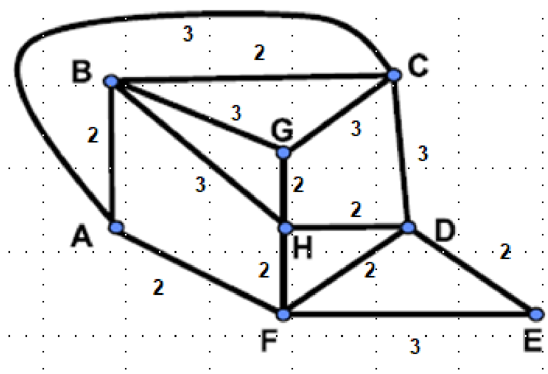
Eulerkreis:

Eulerweg, der kein Kreis ist:

Hamiltonkreis:

b) Zeichnen Sie im linken Graphen das Gerüst ein, welches der Algorithmus von Dijkstra berechnet, wenn A der Startpunkt ist und geben Sie in jeder Ecke auch die errechnete Markierung an. Zeichnen Sie im rechten Graphen das Gerüst ein, welches der Algorithmus von Kruskal berechnet. Geben Sie unten in Worten an, welche Größe die jeweiligen Algorithmen im Allgemeinen minimieren (die konkrete Zahl hier brauchen Sie nicht auszurechnen). (6 BE)





Dijkstra minimiert ...

Kruskal minimiert ...