

**Aufgaben zur Klausur in  
*Diskrete Mathematik (WS 2019/2020)***

**Studiengänge B\_Inf, B\_TInf, B\_ITE, B\_STec, B\_Minf, B\_CGT, B\_WInf, B\_ECom,  
B\_IMCA, Übergangsblock für Masterstudiengänge**

Zeit: 120 Minuten,

erlaubte Hilfsmittel: Taschenrechner

Bitte tragen Sie Ihre Antworten ausschließlich an den freien Stellen nach den jeweiligen Aufgaben ein (ggf. auf der Rückseite links gegenüber weiterschreiben). Nicht zu wertende Teile sind durchzustreichen.

Diese Klausur besteht einschließlich dieses Deckblatts aus 8 Seiten.

Für die Klausur werden insgesamt 80 Bewertungseinheiten (BE) vergeben. Zum Bestehen benötigen Sie mindestens 40 BE.

Viel Erfolg !

## 1. Aufgabe (9 BE)

Gegeben seien die folgenden Prädikate mit den zugehörigen Bedeutungen:

$L(x,y)$ : x liebt y.                       $F(x)$ : x ist eine Frau.                       $M(x)$ : x ist ein Mann.

$V(x,y)$ : x ist mit y verheiratet       $H(x)$ : x ist glücklich.

Drücken Sie die folgenden Sachverhalte ausschließlich durch eine prädikatenlogische Verknüpfung dieser Prädikate aus. Sie dürfen zusätzlich mit arithmetischen Vergleichsprädikaten arbeiten.

Hinweis: Es darf nicht vorausgesetzt werden, dass jeder Mensch entweder ein Mann oder eine Frau ist. Es darf auch nicht vorausgesetzt werden, dass Verheiratetsein auf Gegenseitigkeit beruht.

- a) Alle Frauen lieben Adam. (2 BE)
- b) Adam ist nicht verheiratet. (2 BE)
- c) Adam liebt eine Frau, mit der er nicht verheiratet ist. (2 BE)
- d) Wenn ein Mensch verheiratet ist und von seinem Ehepartner nicht geliebt wird, dann ist solch ein Mensch unglücklich. (3 BE)

## 2. Aufgabe (6 BE)

Gegeben seien die Prädikate aus Aufgabe 1. Beschreiben Sie in Worten, was die folgenden Formeln bedeuten.

Hinweis: Es ist jetzt möglich, dass ein Sachverhalt, der oben nicht vorausgesetzt werden darf, durch eines der folgenden Prädikate nun doch als gültig erklärt wird.

- a)  $\forall x: F(x) \rightarrow \neg V(\text{Adam}, x)$  (2 BE)
- b)  $\forall x: F(x) \rightarrow (L(\text{Adam}, x) \wedge (x = \text{Eva}))$  (2 BE)
- c)  $\forall x: F(x) \leftrightarrow \neg M(x)$  (2 BE)

### 3. Aufgabe (5 BE)

Geben Sie die folgenden Mengen in Elementschreibweise an.  $\mathbb{N}$  soll die 0 enthalten.

a)  $\{x \in \mathbb{N} \mid x \cdot 1 = 0\} =$  (1 BE)

b)  $\{x \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\} \mid \exists y \in \mathbb{N}: x^3 = y\} =$  (1 BE)

c)  $\{x \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\} \mid \exists y \in \mathbb{N}: y^3 = x\} =$  (1 BE)

d)  $(\{1, 2, 3\} \cup \emptyset) \times \text{Potenzmenge}(\{1\}) =$  (2 BE)

### 4. Aufgabe (6 BE)

Gegeben sei die Menge  $M = \{a, b, c, d, e\}$ .

a) Konstruieren Sie eine Äquivalenzrelation auf  $M$ , welche die Elemente  $(a,b)$  und  $(e,d)$  enthält, aber nicht die Elemente  $(a,e)$ ,  $(c,b)$  und  $(d,c)$ . Geben Sie die Relation in Elementschreibweise an, außerdem die Äquivalenzklassen.

b) Konstruieren Sie eine totale Ordnungsrelation auf  $M$ , welche das Element  $(a,b)$  und  $(e,d)$  enthält, aber nicht die Elemente  $(a,e)$ ,  $(c,b)$  und  $(d,c)$ . Geben Sie die Relation in Elementschreibweise an, außerdem das Hassediagramm.

## 5. Aufgabe (3 BE)

Gegeben sei die Menge  $M = \{\{1;2\}, \{2;3\}; \{3\}; \{\}\}$ .

- a) Geben Sie eine Potenzmenge an, von der  $M$  eine echte Teilmenge ist (es reicht aus anzugeben, von welcher Menge  $S$  man die Potenzmenge nehmen muss, d.h. Sie müssen nicht alle Elemente der Potenzmenge explizit angeben).
  
- b) Betrachten Sie die Relation  $R$  auf  $M$ , in der 2 Elemente  $x$  und  $y$  in Relation stehen, wenn  $x \subseteq y$  gilt. Geben Sie an, warum  $R$  keine totale Ordnungsrelation ist.
  
- c) Wie müssen Sie  $M$  verändern, sodass  $R$  auf der geänderten Menge  $M'$  eine totale Ordnungsrelation ist? Geben Sie die veränderte Menge  $M'$  konkret an.

## 6. Aufgabe (12 BE)

Gegeben seien die Mengen  $M = \{a, b, c, d, e\}$  und  $N = \{1, 2, 3, 4\}$  sowie die Relationen  $R = \{(a,1); (b,2); (c,3); (e,4)\} \subseteq M \times N$  und  $S = \{(1,a); (2,a); (3,a), (4,a)\} \subseteq N \times M$

- a) Geben Sie von beiden Relationen  $R$  und  $S$  an, ob sie eine Funktion sind und begründen Sie Ihre Antwort. (4 BE)
  
  
  
  
  
  
  
  
  
  
- b) Bilden Sie die Relation  $T = R \circ S$  (erst  $S$ , dann  $R$ ): Geben Sie  $T$  in Elementdarstellung an, geben Sie wie oben die Grundmenge an, von der  $T$  eine Teilmenge ist und untersuchen Sie auch hier, ob  $T$  eine Funktion ist und begründen Sie Ihre Antwort. (3 BE)
  
  
  
  
  
  
  
  
  
  
- c) Untersuchen Sie bei allen 3 Relationen  $R$ ,  $S$  und  $T$ , ob diese injektiv (linkseindeutig) und ob sie surjektiv (rechtsvollständig) sind und begründen Sie Ihre Antwort. (5 BE)

## 7. Aufgabe (3 BE)

Gegeben sei die Teiler-Algebra  $T_{24} = \{m \in \mathbb{N} : m \text{ teilt } 24\}$  mit den Operationen i), ii), iii):

$$\text{i) } \sim p = 24 / p$$

$$\text{ii) } p \oplus q = \text{ggT}(p, q)$$

$$\text{iii) } p \odot q = \text{kgV}(p, q)$$

a) Geben Sie alle Elemente explizit an und benennen Sie das Nullelement und das Einselement. (2 BE)

b) Begründen Sie, warum  $T_{24}$  keine Boolesche Algebra ist. (1 BE)

$$\begin{aligned} p \oplus 0 &= \\ p \odot 1 &= p \\ \text{Neutrale Elemente} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p \odot 0 &= 0 \\ p \oplus 1 &= 1 \\ \text{"Nullmultiplikation"} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p \odot \sim p &= 0 \\ p \oplus \sim p &= 1 \\ \text{Inverses Element} \\ \text{(Komplement)} \end{aligned}$$

## 8. Aufgabe (5 BE)

Bestimmen Sie die Anzahl der Möglichkeiten,  $n$  Studierende auf  $n$  Plätze im Hörsaal zu setzen. Hierbei zählt als eine Möglichkeit eine eindeutige Zuordnung für alle Studierenden, auf welchem Platz sie jeweils sitzen. Beweisen Sie Ihre Behauptung durch vollständige Induktion.

## 9. Aufgabe (2 BE)

Beweisen Sie mit Hilfe des Schubfachprinzips: Unter den 22 Fußballspielern, die bei einem Spiel auf dem Platz stehen, sind mindestens 2, die im selben Monat Geburtstag haben.

## 10. Aufgabe (4 BE)

Bestimmen Sie den ggT und das kgV von 147149 und 74989 mit Hilfe des Euklidischen Algorithmus. Geben Sie die Zwischenschritte an.

## 11. Aufgabe (6 BE)

Gegeben seien die folgenden Tabellen von Gruppen:

$(S_3, \circ)$ :	<table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr> <th><math>\circ</math></th> <th><math>\rho_0</math></th> <th><math>\rho_1</math></th> <th><math>\rho_2</math></th> <th><math>\sigma_l</math></th> <th><math>\sigma_r</math></th> <th><math>\sigma_o</math></th> </tr> <tr> <th><math>\rho_0</math></th> <td><math>\rho_0</math></td> <td><math>\rho_1</math></td> <td><math>\rho_2</math></td> <td><math>\sigma_l</math></td> <td><math>\sigma_r</math></td> <td><math>\sigma_o</math></td> </tr> <tr> <th><math>\rho_1</math></th> <td><math>\rho_1</math></td> <td><math>\rho_2</math></td> <td><math>\rho_0</math></td> <td><math>\sigma_o</math></td> <td><math>\sigma_l</math></td> <td><math>\sigma_r</math></td> </tr> <tr> <th><math>\rho_2</math></th> <td><math>\rho_2</math></td> <td><math>\rho_0</math></td> <td><math>\rho_1</math></td> <td><math>\sigma_r</math></td> <td><math>\sigma_o</math></td> <td><math>\sigma_l</math></td> </tr> <tr> <th><math>\sigma_l</math></th> <td><math>\sigma_l</math></td> <td><math>\sigma_r</math></td> <td><math>\sigma_o</math></td> <td><math>\rho_0</math></td> <td><math>\rho_1</math></td> <td><math>\rho_2</math></td> </tr> <tr> <th><math>\sigma_r</math></th> <td><math>\sigma_r</math></td> <td><math>\sigma_o</math></td> <td><math>\sigma_l</math></td> <td><math>\rho_2</math></td> <td><math>\rho_0</math></td> <td><math>\rho_1</math></td> </tr> <tr> <th><math>\sigma_o</math></th> <td><math>\sigma_o</math></td> <td><math>\sigma_l</math></td> <td><math>\sigma_r</math></td> <td><math>\rho_1</math></td> <td><math>\rho_2</math></td> <td><math>\rho_0</math></td> </tr> </table>	$\circ$	$\rho_0$	$\rho_1$	$\rho_2$	$\sigma_l$	$\sigma_r$	$\sigma_o$	$\rho_0$	$\rho_0$	$\rho_1$	$\rho_2$	$\sigma_l$	$\sigma_r$	$\sigma_o$	$\rho_1$	$\rho_1$	$\rho_2$	$\rho_0$	$\sigma_o$	$\sigma_l$	$\sigma_r$	$\rho_2$	$\rho_2$	$\rho_0$	$\rho_1$	$\sigma_r$	$\sigma_o$	$\sigma_l$	$\sigma_l$	$\sigma_l$	$\sigma_r$	$\sigma_o$	$\rho_0$	$\rho_1$	$\rho_2$	$\sigma_r$	$\sigma_r$	$\sigma_o$	$\sigma_l$	$\rho_2$	$\rho_0$	$\rho_1$	$\sigma_o$	$\sigma_o$	$\sigma_l$	$\sigma_r$	$\rho_1$	$\rho_2$	$\rho_0$
$\circ$	$\rho_0$	$\rho_1$	$\rho_2$	$\sigma_l$	$\sigma_r$	$\sigma_o$																																												
$\rho_0$	$\rho_0$	$\rho_1$	$\rho_2$	$\sigma_l$	$\sigma_r$	$\sigma_o$																																												
$\rho_1$	$\rho_1$	$\rho_2$	$\rho_0$	$\sigma_o$	$\sigma_l$	$\sigma_r$																																												
$\rho_2$	$\rho_2$	$\rho_0$	$\rho_1$	$\sigma_r$	$\sigma_o$	$\sigma_l$																																												
$\sigma_l$	$\sigma_l$	$\sigma_r$	$\sigma_o$	$\rho_0$	$\rho_1$	$\rho_2$																																												
$\sigma_r$	$\sigma_r$	$\sigma_o$	$\sigma_l$	$\rho_2$	$\rho_0$	$\rho_1$																																												
$\sigma_o$	$\sigma_o$	$\sigma_l$	$\sigma_r$	$\rho_1$	$\rho_2$	$\rho_0$																																												

$(\mathbb{Q}_6, \circ)$ :	<table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr> <th><math>\circ</math></th> <th><math>x</math></th> <th><math>\frac{1}{x}</math></th> <th><math>1-x</math></th> <th><math>\frac{x-1}{x}</math></th> <th><math>\frac{1}{1-x}</math></th> <th><math>\frac{x}{x-1}</math></th> </tr> <tr> <th><math>x</math></th> <td><math>x</math></td> <td><math>\frac{1}{x}</math></td> <td><math>1-x</math></td> <td><math>\frac{x-1}{x}</math></td> <td><math>\frac{1}{1-x}</math></td> <td><math>\frac{x}{x-1}</math></td> </tr> <tr> <th><math>\frac{1}{x}</math></th> <td><math>\frac{1}{x}</math></td> <td><math>x</math></td> <td><math>\frac{1}{1-x}</math></td> <td><math>\frac{x}{x-1}</math></td> <td><math>1-x</math></td> <td><math>\frac{x-1}{x}</math></td> </tr> <tr> <th><math>1-x</math></th> <td><math>1-x</math></td> <td><math>\frac{x-1}{x}</math></td> <td><math>x</math></td> <td><math>\frac{1}{x}</math></td> <td><math>\frac{x}{x-1}</math></td> <td><math>\frac{1}{1-x}</math></td> </tr> <tr> <th><math>\frac{x-1}{x}</math></th> <td><math>\frac{x-1}{x}</math></td> <td><math>\frac{1}{x}</math></td> <td><math>\frac{x}{x-1}</math></td> <td><math>\frac{1}{1-x}</math></td> <td><math>x</math></td> <td><math>\frac{x-1}{x}</math></td> </tr> <tr> <th><math>\frac{1}{1-x}</math></th> <td><math>\frac{1}{1-x}</math></td> <td><math>\frac{x}{x-1}</math></td> <td><math>\frac{1}{x}</math></td> <td><math>x</math></td> <td><math>\frac{x-1}{x}</math></td> <td><math>1-x</math></td> </tr> <tr> <th><math>\frac{x}{x-1}</math></th> <td><math>\frac{x}{x-1}</math></td> <td><math>\frac{1}{1-x}</math></td> <td><math>\frac{x-1}{x}</math></td> <td><math>1-x</math></td> <td><math>\frac{1}{x}</math></td> <td><math>x</math></td> </tr> </table>	$\circ$	$x$	$\frac{1}{x}$	$1-x$	$\frac{x-1}{x}$	$\frac{1}{1-x}$	$\frac{x}{x-1}$	$x$	$x$	$\frac{1}{x}$	$1-x$	$\frac{x-1}{x}$	$\frac{1}{1-x}$	$\frac{x}{x-1}$	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{x}$	$x$	$\frac{1}{1-x}$	$\frac{x}{x-1}$	$1-x$	$\frac{x-1}{x}$	$1-x$	$1-x$	$\frac{x-1}{x}$	$x$	$\frac{1}{x}$	$\frac{x}{x-1}$	$\frac{1}{1-x}$	$\frac{x-1}{x}$	$\frac{x-1}{x}$	$\frac{1}{x}$	$\frac{x}{x-1}$	$\frac{1}{1-x}$	$x$	$\frac{x-1}{x}$	$\frac{1}{1-x}$	$\frac{1}{1-x}$	$\frac{x}{x-1}$	$\frac{1}{x}$	$x$	$\frac{x-1}{x}$	$1-x$	$\frac{x}{x-1}$	$\frac{x}{x-1}$	$\frac{1}{1-x}$	$\frac{x-1}{x}$	$1-x$	$\frac{1}{x}$	$x$
$\circ$	$x$	$\frac{1}{x}$	$1-x$	$\frac{x-1}{x}$	$\frac{1}{1-x}$	$\frac{x}{x-1}$																																												
$x$	$x$	$\frac{1}{x}$	$1-x$	$\frac{x-1}{x}$	$\frac{1}{1-x}$	$\frac{x}{x-1}$																																												
$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{x}$	$x$	$\frac{1}{1-x}$	$\frac{x}{x-1}$	$1-x$	$\frac{x-1}{x}$																																												
$1-x$	$1-x$	$\frac{x-1}{x}$	$x$	$\frac{1}{x}$	$\frac{x}{x-1}$	$\frac{1}{1-x}$																																												
$\frac{x-1}{x}$	$\frac{x-1}{x}$	$\frac{1}{x}$	$\frac{x}{x-1}$	$\frac{1}{1-x}$	$x$	$\frac{x-1}{x}$																																												
$\frac{1}{1-x}$	$\frac{1}{1-x}$	$\frac{x}{x-1}$	$\frac{1}{x}$	$x$	$\frac{x-1}{x}$	$1-x$																																												
$\frac{x}{x-1}$	$\frac{x}{x-1}$	$\frac{1}{1-x}$	$\frac{x-1}{x}$	$1-x$	$\frac{1}{x}$	$x$																																												

- a) Geben Sie einen Isomorphismus zwischen diesen beiden Gruppen an. Benennen Sie die Kriterien, wonach Sie vorgegangen sind. (5 BE)

- b) Begründen Sie, warum die folgende Gruppe nicht isomorph zu den beiden oben angegebenen Gruppen ist: (1 BE)

$\oplus$	$[0]_6$	$[1]_6$	$[2]_6$	$[3]_6$	$[4]_6$	$[5]_6$
$[0]_6$	$[0]_6$	$[1]_6$	$[2]_6$	$[3]_6$	$[4]_6$	$[5]_6$
$[1]_6$	$[1]_6$	$[2]_6$	$[3]_6$	$[4]_6$	$[5]_6$	$[0]_6$
$[2]_6$	$[2]_6$	$[3]_6$	$[4]_6$	$[5]_6$	$[0]_6$	$[1]_6$
$[3]_6$	$[3]_6$	$[4]_6$	$[5]_6$	$[0]_6$	$[1]_6$	$[2]_6$
$[4]_6$	$[4]_6$	$[5]_6$	$[0]_6$	$[1]_6$	$[2]_6$	$[3]_6$
$[5]_6$	$[5]_6$	$[0]_6$	$[1]_6$	$[2]_6$	$[3]_6$	$[4]_6$

## 12. Aufgabe (5 BE)

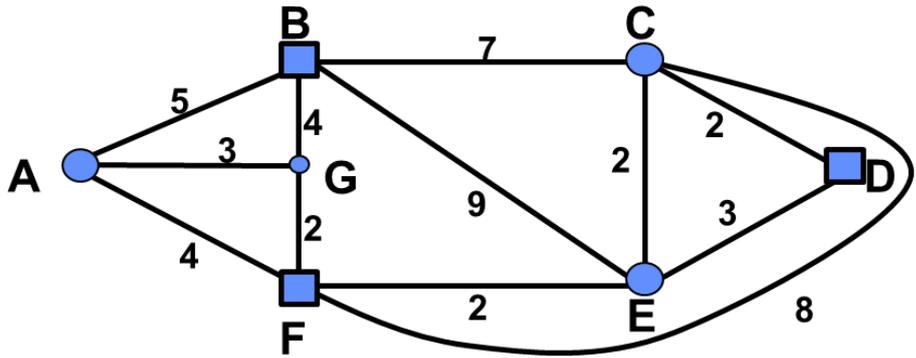
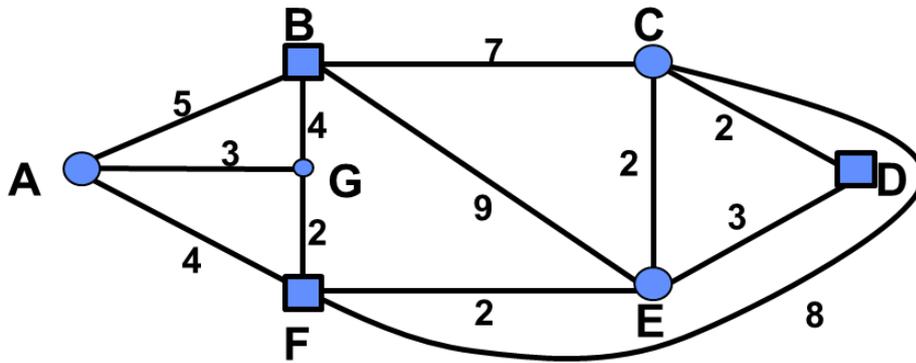
- a) Berechnen Sie das Polynom  $(2x^4 + x^2 + 2)$  modulo  $(x^3 + 2x + 1)$  in  $\mathbb{Z}_3[x]$ . (2 BE)

- b) Für welchen Körper könnte diese Berechnung relevant sein? (1 BE)

- c) Welche Bedingung muss erfüllt sein, damit Sie diese Rechnung hier zur Erstellung einer Multiplikationstabelle verwenden können? Ist diese Bedingung hier erfüllt? Begründen Sie Ihre Antwort. (2 BE)

## 13. Aufgabe (2 BE)

Gegeben sei die Permutation  $(1\ 3\ 5)(2\ 10\ 6)(9\ 7\ 4)(8\ 11\ 15)(14\ 16\ 12\ 17\ 13)$ . Ist die Permutation gerade oder ungerade? Begründen Sie Ihre Antwort.



### 14. Aufgabe (12 BE)

Gegeben sei der hier angegebene Graph (in zweifacher Ausführung).

- Geben Sie im **oberen** Graphen das Gerüst an, welches der Algorithmus von Dijkstra berechnet, wenn er zu allen Knoten Wege von A aus berechnet. Welche Größe optimiert der Algorithmus und wie groß ist diese Zahl hier? (4 BE)
- Geben Sie im **unteren** Graphen das Gerüst an, welches der Algorithmus von Kruskal berechnet. Welche Größe optimiert der Algorithmus und wie groß ist diese Zahl hier? (4 BE)
- Geben Sie die Ecken-Färbungszahl des Graphen an und begründen Sie Ihre Antwort (2 Begründungen: Warum ist die Zahl nicht größer und warum nicht kleiner? Falls Sie dafür den Graphen brauchen, nehmen Sie den **unteren** Graphen). (2 BE)
- Fügen Sie im **oberen** Graphen eine zusätzliche Kante zwischen zwei vorhandenen Ecken hinzu, sodass der Graph nicht mehr planar ist. Begründen Sie mit einem graphentheoretischen Satz, warum er dann nicht mehr planar ist. (2 BE)

Tipp: Achten Sie auf die unterschiedlich gekennzeichneten Ecken in der Skizze.