Aufgaben zur Klausur in *Diskrete Mathematik* (SS 2019)

Studiengänge:

B_Inf, B_TInf, B_ITE, B_STec, B_Minf, B_CGT, B_WInf, B_ECom, B_IMCA, Übergangsblock für Masterstudiengänge, Schülervorlesung

Zeit: 120 Minuten,

erlaubte Hilfsmittel: Taschenrechner

Bitte tragen Sie Ihre Antworten und eindeutig gekennzeichneten Lösungen ausschließlich an den freien Stellen nach den jeweiligen Aufgaben ein (ggf. auf der freien Seite gegenüber weiterschreiben). Nebenrechnungen können ebenfalls auf der freien Seite gegenüber durchgeführt werden. Falls sie nicht gewertet werden sollen, bitte durchstreichen!

Diese Klausur besteht einschließlich dieses Deckblatts aus 7 Seiten.

Für die Klausur werden insgesamt 70 Bewertungseinheiten (BE) vergeben. Zum Bestehen benötigen Sie mindestens 35 BE.

Viel Erfolg !

1. Aufgabe (9 BE)

Gegeben seien folgende Prädikate:

- gleich (x,y) bedeutet, dass x gleich y ist.
- wohntIn (x,y) bedeutet, dass x im Ort y wohnt.
- liegtIn (x,y) bedeutet, dass x im Ort y liegt.
- studiertAn (x,y) bedeutet, dass x an der Hochschule y studiert.

Drücken Sie die folgenden Sachverhalte ausschließlich durch eine logische Verknüpfung dieser Prädikate aus! Insbesondere dürfen Sie nicht mit einschränkenden Definitionsbereichen für die Quantorvariablen arbeiten oder mit zusätzlichen Prädikaten.

a) Anna wohnt in Hamburg und studiert an der FH Wedel. (1 BE)

b) Wedel hat eine Hochschule, und es gibt auch mindestens einen in Wedel wohnhaften Studierenden dieser Hochschule. (2 BE)

c) Otto studiert an einer Hochschule in der Stadt, in der er wohnt. (2 BE)

d) Anna wohnt im selben Ort wie Otto. Beide studieren aber an verschiedenen Hochschulen. (2 BE)

e) Folgt aus diesen Sachverhalten, dass Hamburg eine Hochschule hat? Begründen Sie Ihre Antwort. (2 BE)

2. Aufgabe (6 BE)

Gegeben seien die folgenden Prädikate auf der Menge aller Menschen:

$L(x,y)$: x liebt y $F(x)$: x ist weiblich $M(x)$: x ist männlich

Beschreiben Sie in einem deutschen Satz, was die folgenden Aussagen bedeuten:

a) $\forall x : M(x) \wedge L(x,x)$ (1 BE)

b) $\forall x \forall y : (F(x) \wedge M(y) \wedge L(x,y)) \rightarrow \exists\, z: L(x,z) \wedge (z \neq y)$ (2 BE)

Drücken Sie die folgenden Sachverhalte aus, indem Sie a) und b) etwas abwandeln:

c) Jeder Mann liebt sich selbst. (1 BE)

d) Wenn eine Frau einen Mann liebt, dann liebt sie keinen anderen Mann. (2 BE)

3. Aufgabe (4 BE)

Geben Sie die folgenden Mengen in Elementschreibweise an:

$A = \{x \in \mathbb{N} \cup \{0\} \mid x < 3\} =$

$B = \{x \in \mathbb{R} \mid \exists y \in A: x^2 = y\} =$

$C = \{x \in \mathbb{R} \mid \exists y \in A: y^2 = x\} =$

$D = \{x \in \mathbb{R} \mid \exists y \in A: y = - x^2\} =$

4. Aufgabe (7 BE)

Im Folgenden ist das Ergebnis entweder eine Menge oder ein Wahrheitswert. Geben Sie jeweils die resultierende Menge in Elementschreibweise bzw. den Wahrheitswert an.

a) $(3 ; 4) = (4 ; 3)$

b) $\{3 ; 4\} = \{4 ; 3\}$

c) $\{3 ; 4\} \setminus \{4 ; 3\}$

d) $\{3 ; 4\} \setminus \{4 ; 2\}$

e) $(1 ; 2) \in \{(3 ; 1) ; (2 ; 1) ; (4 ; 8)\}$

f) $\{\{1 ; 2\}\} \in \{\{3 ; 1\} ; \{2 ; 1\} ; \{2 ; 3\} ; \{4 ; 8\} ; \{3 ; 2\}\}$

g) $\{(1 ; 2)\} \subseteq \{3 ; 1 ; 1 ; 2 ; 2 ; 3 ; 4 ; 8 ; 3 ; 2\}$

h) $\{1 ; 2\} \subseteq \{3 ; 1 ; 1 ; 2 ; 2 ; 3 ; 4 ; 8 ; 3 ; 2\}$

5. Aufgabe (9 BE)

Gegeben sei die Menge M = {1 ; 2 ; 3}

a) Konstruieren Sie eine totale Ordnungsrelation R auf M, welche das Element (1 ; 3) enthält, aber nicht das Element (2 ; 3). Geben Sie R in Elementschreibweise an. (2 BE)

b) Zeichnen Sie das entsprechende Hasse-Diagramm. (1 BE)

c) Betrachten Sie auf M die weitere Relation S = {(1 ; 1); (3 ; 2); (2; 3)} und bilden Sie die Relation T = S ° S in Elementdarstellung. (1 BE)

d) Geben Sie an, ob R, S und T Funktionen sind und begründen Sie jeweils Ihre Antwort. (2,5 BE)

e) Geben Sie an, wer von R, S und T injektiv (linkseindeutig) ist und wer surjektiv (rechtsvollständig). Eine Begründung ist nicht erforderlich. (2,5 BE)

6. Aufgabe (3 BE)

Betrachten Sie die Menge aller Teiler von 30:

a) Geben Sie diese Menge in Elementdarstellung an. (1 BE)

b) Demonstrieren Sie eine der deMorganschen Regeln an den Elementen 3 und 6, indem Sie das Ergebnis beider Seiten explizit angeben. (2 BE)

7. Aufgabe (6 BE)

Beweisen Sie durch vollständige Induktion:

> *Wenn n Leute bei einer Geburtstagsfeier mit Sekt anstoßen und jeder mit seinem Glas das Glas jedes anderen genau einmal berührt, dann gibt es insgesamt*
> *$n \cdot (n-1) / 2$ Gläserkontakte.*

<u>Tipp für den Induktionsschluss:</u> Überlegen Sie sich, wie viele Gläserkontakte hinzukommen, wenn ein neuer Gast hinzukommt, und berechnen Sie dann die Anzahl aller Gläserkontakte unter Verwendung der Induktionsannahme.

8. Aufgabe (3 BE)

Beweisen Sie folgende Aussage indirekt:

> *Es gibt keine kleinste ganze Zahl.*

9. Aufgabe (4 BE)

Bestimmen Sie den ggT und das kgV von 112251 und 90241 mit Hilfe des Euklidischen Algorithmus. Geben Sie die Zwischenschritte an.

10. Aufgabe (3 BE)

Geben Sie für (1 ; 2 ; 3 ; 4) $\in (\mathbb{Z}_5)^4$ bezüglich der komponentenweisen Addition seine Ordnung und das inverse Element an. Weisen Sie Ihre Behauptung durch Zwischenrechnungen nach.

11. Aufgabe (6 BE)

a) Geben Sie alle Elemente von GF(4) in Vektorschreibweise an. (1 BE)

b) Geben Sie ein geeignetes Polynom an, das Sie für die Multiplikation in GF(4) gebrauchen können und begründen Sie Ihre Entscheidung, indem Sie die erforderliche Eigenschaft benennen und durch Rechnung auch belegen. (2 BE)

c) Multiplizieren Sie in GF (4) die Elemente (1,1) und (1,0). Transformieren Sie diese dafür in Polynomschreibweise und benutzen Sie dafür das Polynom aus b). Geben Sie das Ergebnis dann wieder in Vektorschreibweise an. (3 BE)

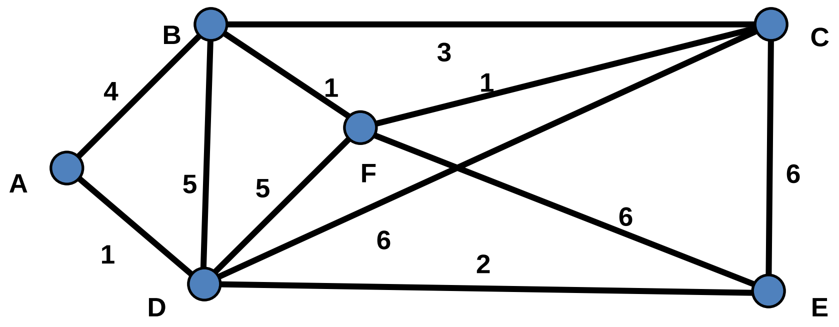
12. Aufgabe (2 BE)

Gegeben sei die Permutation (20 2 5 4) (12 10 13) (19 3 9 7 15) (11 14 17) (1 16 6 8 18).

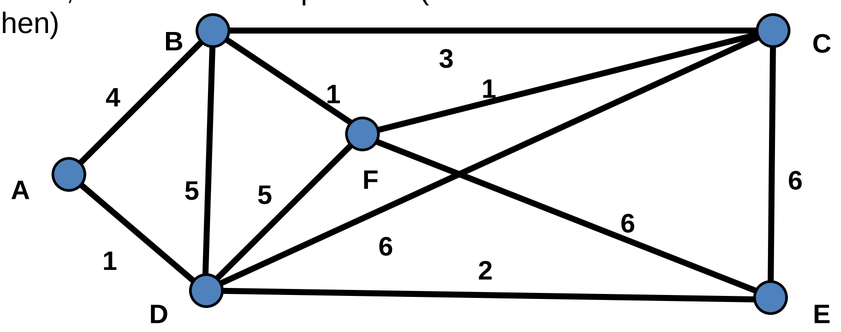
Ist diese Permutation gerade oder ungerade? Begründen Sie Ihre Antwort.

13. Aufgabe (8 BE)

a) Geben Sie das minimale Gerüst an, welches der Algorithmus von Kruskal berechnet (markieren Sie die Kanten im unten angegebenen Graphen) (2 BE)



b) Geben Sie das Gerüst aus kürzesten Wegen an, welches der Algorithmus von Dijkstra berechnet, wenn F der Startpunkt ist (markieren Sie die Kanten im unten angegebenen Graphen) (2 BE)



c) Geben Sie die minimale Eckenfärbungszahl an. Begründen Sie Ihre Antwort. (2 BE)

d) Machen Sie den Graphen nichtplanar, indem Sie in b) genau eine Kante hinzufügen. Begründen Sie die Nichtplanarität, indem Sie hier eine verbotene Teilstruktur benennen. (2 BE)