Fachhochschule Wedel
Prof. Dr. Sebastian Iwanowski

11.02.2019

DM

Aufgaben zur Klausur in

***Diskrete Mathematik* (WS 2018/2019)**

Studiengänge B_Inf, B_TInf, B_ITE, B_STec, B_Minf, B_CGT, B_WInf, B_ECom, B_IMCA, Übergangsblock für Masterstudiengänge

Zeit: 120 Minuten,

erlaubte Hilfsmittel: Taschenrechner

Bitte tragen Sie Ihre Antworten ausschließlich an den freien Stellen nach den jeweiligen Aufgaben ein (ggf. auf der Rückseite links gegenüber weiterschreiben). Nicht zu wertende Teile sind durchzustreichen.

Diese Klausur besteht einschließlich dieses Deckblatts aus 7 Seiten.

Für die Klausur werden insgesamt 80 Bewertungseinheiten (BE) vergeben. Zum Bestehen benötigen Sie mindestens 40 BE.

Viel Erfolg !

1. Aufgabe (10 BE)

Gegeben seien die folgenden Prädikate mit den zugehörigen Bedeutungen:

L(x,y)	x liebt y.
F(x)	x ist weiblich.
H(x,y,z)	x half y im Studienfach z.
B(x,y)	x bestand das Studienfach y.

Drücken Sie die folgenden Sachverhalte ausschließlich durch eine prädikatenlogische Verknüpfung dieser vier Prädikate aus. Sie dürfen zusätzlich mit arithmetischen Vergleichsprädikaten arbeiten.

a) Dieter half einer Frau in DM. (2 BE)

b) Nicht jeder hat DM bestanden. (2 BE)

c) Außer Dieter hat jeder Analysis bestanden. (2 BE)

d) Alle Frauen haben DM bestanden. (2 BE)

e) Jeder, dem Dieter darin geholfen hat, hat DM bestanden. (2 BE)

f) Jede Person, der in einem Fach geholfen wurde, das diese Person dann auch bestanden hat, liebt diesen Helfer. (2 BE)

(als Bonuspunkte)

2. Aufgabe (13 BE)

a) Geben Sie folgende Mengen in Elementschreibweise an: (4 BE)

$A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 5\} =$

$B = \{x \in \mathbb{N} \mid \exists y \in A: x^2 = y\} =$

$C = \{x \in \mathbb{N} \mid \exists y \in A: y^2 = x\} =$

$D = \{x \in \mathbb{N} \mid x \cdot 0 = 1\} =$

b) Berechnen Sie folgende Mengen bzw. Wahrheitswerte. Sie müssen mit Ihren Ergebnissen aus a) rechnen. Stellen Sie die berechneten Mengen dar wie in a). (8 BE)

$B \cup C =$

$B \cap C =$

$A \setminus B =$

$D \in B =$

(Potenzmenge) $\wp(D) =$

$B \in \wp(B)$

$B \subseteq \wp(B)$

$D \subseteq \wp(D)$

c) Geben Sie unter den oben angegebenen Mengen zwei Mengen M_1 und M_2 an, sodass sowohl $M_1 \in M_2$ als auch $M_1 \subseteq M_2$ gilt. Falls das bei Ihren Lösungen nicht möglich ist (sollte es aber sein), geben Sie zwei andere Mengen an, für die das gilt. (1 BE)

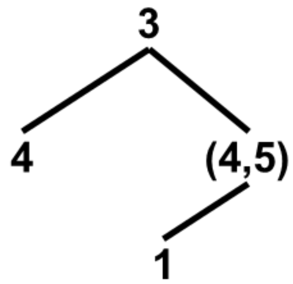
3. Aufgabe (4 BE)

Gegeben sei die Menge M = {a, b, c, d, e}.

Konstruieren Sie eine Äquivalenzrelation auf M, welche die Elemente (a,c) und (e,c) enthält, aber nicht die Elemente (a,b), (b,d) und (d,e). Geben Sie die Relation in Elementschreibweise an, außerdem die Äquivalenzklassen.

4. Aufgabe (3 BE)

Gegeben sei das folgende Hassediagramm:



a) Geben Sie die Menge M an, auf der dieses Hassediagramm eine Ordnungsrelation beschreibt. (1 BE)

b) Kennzeichnen Sie oben die minimalen und maximalen Elemente. (1 BE)

c) Ist die Ordnungsrelation partiell oder total? Begründen Sie die Antwort. (1 BE)

5. Aufgabe (5 BE)

Gegeben seien die Mengen M = {a, b, c, d, e} und N = {1, 2, 3, 4}

a) Konstruieren Sie eine Funktion von M nach N, die nicht surjektiv ist. Falls Sie diese wenigstens injektiv machen können, realisieren Sie das oder begründen Sie, warum das nicht geht. (2 BE)

b) Konstruieren Sie eine Funktion von M nach N, die nicht injektiv ist. Falls Sie diese wenigstens surjektiv machen können, realisieren Sie das oder begründen Sie, warum das nicht geht. (2 BE)

c) Konstruieren Sie eine Funktion von M nach N, deren Inverse auch eine Funktion ist, oder begründen Sie, warum das nicht geht. (1 BE)

6. Aufgabe (6 BE)

Betrachten Sie die Menge der Booleschen Schaltfunktionen für n = 2:

$\mathscr{B} = \{f:\{0,1\}^2 \rightarrow \{0,1\}\}$ mit den Operationen i), ii), iii):

i) $\sim f(x_1,x_2) \quad = 1 - f(x_1,x_2)$

ii) $(f \oplus g)(x_1,x_2) = \max \{f(x_1,x_2), g(x_1,x_2)\}$

iii) $(f \bullet g)(x_1,x_2) \ = \min \{f(x_1,x_2), g(x_1,x_2)\}$

a) Geben Sie ein beliebiges Element f aus $\mathscr{B}$ an. (2 BE)

b) Zeigen Sie für dieses Element die Gesetze vom inversen Element: $f \oplus (\sim f)$ und $(f \bullet \sim f)$. Geben Sie jeweils die Zwischenwerte an und begründen Sie, warum das Ergebnis den Anforderungen einer Booleschen Algebra entspricht. (4 BE)

7. Aufgabe (4 BE)

Zeigen Sie durch vollständige Induktion, dass unter 2 hintereinanderliegenden natürlichen Zahlen immer eine gerade Zahl ist.

8. Aufgabe (2 BE)

Beweisen Sie indirekt: Es gibt keine kleinste ganze Zahl.

9. Aufgabe (4 BE)

Belegen Sie die Teilbarkeit der Zahl 371 durch 7 durch die Quersummenregel mit Hilfe einer geeigneten Basis. Zeigen Sie ferner, dass die Quersummenregel mit Basis 10 nicht funktioniert.

10. Aufgabe (4 BE)

a) Geben Sie jeweils die Elemente der beiden Gruppen ($\mathbb{Z}_6$,+) und (($\mathbb{Z}_9$)*,*) an. (2 BE)

b) Sind die beiden Gruppen isomorph? Wenn ja, geben Sie den Isomorphismus an, wenn nicht, begründen Sie das. (2 BE)

11. Aufgabe (4 BE)

Betrachten Sie die folgende Additionstabelle für eine Gruppe (G,+) und geben Sie eine geeignete Multiplikationstabelle an, sodass (G,+, •) ein Körper wird. Falls das nicht möglich ist, begründen Sie das. Dann brauchen Sie natürlich keine Multiplikationstabelle anzugeben.

+	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	a	d	c
c	c	d	a	b
d	d	c	b	a

12. Aufgabe (6 BE)

a) Berechnen Sie das Polynom ($3x^3 + 4x^2 + 2$) modulo ($x^2 + 4x + 2$) in $\mathbb{Z}_5[x]$. (3 BE)

b) Für welchen Körper könnte diese Berechnung relevant sein? (1 BE)

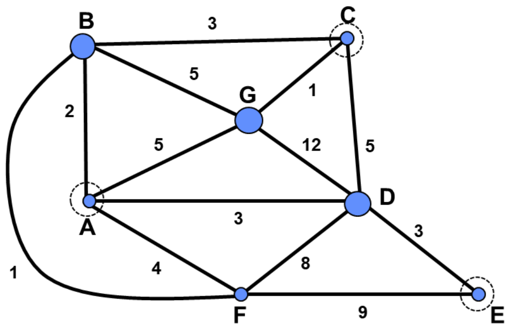
c) Welche Bedingung muss erfüllt sein, damit Sie diese Rechnung hier zur Erstellung einer Multiplikationstabelle verwenden können? Ist diese Bedingung hier erfüllt? Begründen Sie Ihre Antwort. (2 BE)

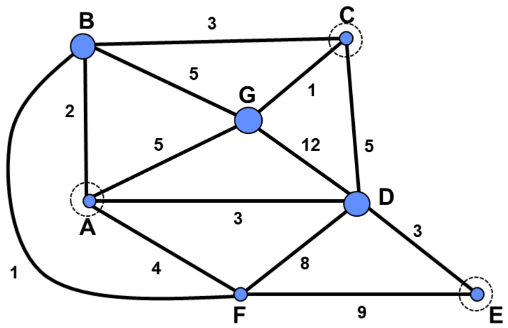
13. Aufgabe (4 BE)

Gegeben sei die Permutation (2 5 4) (12 10 13) (9 7 15) (11 14 17) (1 16 6 8 18).

a) Schreiben Sie diese als Permutationstabelle auf. (2 BE)

b) Ist die Permutation gerade oder ungerade? Begründen Sie Ihre Antwort. (2 BE)





14. Aufgabe (11 BE)

Gegeben sei der oben angegebene Graph (in zweifacher Ausführung).

a) Geben Sie links das Gerüst an, welches der Algorithmus von Dijkstra berechnet, wenn er zu allen Knoten Wege von A aus berechnet. Welche Größe optimiert der Algorithmus und wie groß ist diese Zahl hier? (3,5 BE)

b) Geben Sie rechts das Gerüst an, welches der Algorithmus von Kruskal berechnet. Welche Größe optimiert der Algorithmus und wie groß ist diese Zahl hier? (3,5 BE)

c) Geben Sie die Ecken-Färbungszahl des Graphen an und begründen Sie Ihre Antwort (2 Begründungen: Warum ist die Zahl nicht größer und warum nicht kleiner) (2 BE)

d) Fügen Sie im angegebenen Graphen eine zusätzliche Kante zwischen zwei vorhandenen Ecken hinzu, sodass der Graph nicht mehr planar ist. Begründen Sie mit einem graphentheoretischen Satz, warum er dann nicht mehr planar ist. Sie dürfen für eine Illustration den rechten Graph benutzen. . (2 BE)

Tipp: Achten Sie auf die unterschiedlich gekennzeichneten Ecken in der Skizze oben!