Aufgaben zur Klausur in *Diskrete Mathematik* (SS 2018)

Studiengänge B_Inf, B_TInf, B_ITE, B_STec, B_Minf, B_CGT, B_WInf, B_ECom, B_IMCA, Übergangsblock für Masterstudiengänge

Zeit: 120 Minuten,

erlaubte Hilfsmittel: Taschenrechner

Bitte tragen Sie Ihre Antworten und fertigen Lösungen ausschließlich an den freien Stellen nach den jeweiligen Aufgaben ein (ggf. auf der jeweiligen Rückseite weiterschreiben).

Diese Klausur besteht einschließlich dieses Deckblatts aus 7 Seiten.

Für die Klausur werden insgesamt 66 Bewertungseinheiten (BE) vergeben. Zum Bestehen benötigen Sie mindestens 33 BE.

Viel Erfolg !

1. Aufgabe (11 BE)

Gegeben seien die folgenden Prädikate mit den zugehörigen Bedeutungen:

L(x,y) x liebt y.

K(x,y) x kennt y.

Der Definitionsbereich für die Parameter ist die Menge aller Menschen.

Beschreiben Sie die folgenden Aussagen mit jeweils einem prädikatenlogischen Ausdruck, der *ausschließlich* die Prädikate L oder K verwendet!

a) Anna liebt Bert, aber sie kennt ihn nicht. (1 BE)

b) Wer Bert kennt, liebt ihn nicht. (2 BE)

c) Bert liebt nur sich selbst. (2 BE)

d) Alle lieben Anna, nur Bert tut das nicht. (2 BE)

Nehmen Sie an, dass alle Aussagen a) – d) gelten und beantworten Sie folgende Fragen mit Begründung:

e) Liebt Anna sich selbst? (2 BE)

f) Kennt Bernd sich selbst? (2 BE)

2. Aufgabe (11 BE)

a) Geben Sie die folgenden Mengen in Elementschreibweise an: (3 BE)

$A = \{x \in \mathbb{Z} \mid \exists y \in \{1, 2, 3\}: x + y = 1\} =$

$B = \{x \in \mathbb{Z} \mid \exists y \in \{1, 2, 3\}: (x + y)^2 = 1\} =$

$C = \{x \in \mathbb{Z} \mid \exists y \in \{1, 2, 3\}: (x + y)^2 = -1\} =$

b) Geben Sie von den folgenden Ausdrücken entweder die Ergebnismenge an oder den Wahrheitswert (ja nach Operator). Als Grundlage müssen Sie Ihr Ergebnis von a) verwenden (egal, ob es richtig oder falsch ist). (8 BE)

$A \cup B =$

$A \subset B =$

$A \cap B =$

$C \in A =$

$C \subset B =$

$B \setminus C =$

$(A \cup B) \setminus (B \setminus C) =$

$(A \cup B) \subset (B \setminus C) =$

3. Aufgabe (7 BE)

Sei M = {a, b, c, d} eine Menge und R = {(a,b); (b,a); (c,a); (d,d)} eine Relation.

a) Begründen Sie, warum R eine Funktion ist. (1 BE)

b) Ist R injektiv? Ist R surjektiv? Begründen Sie Ihre Antwort für beide Fragen! (2 BE)

c) Geben Sie die Komposition $R \circ R$ explizit an! (1 BE)

d) Ist $R \circ R$ eine Funktion? Begründen Sie Ihre Antwort! (1 BE)

e) Fügen Sie zu R noch eine minimale Anzahl von Elementen hinzu, sodass es eine Äquivalenzrelation wird. (2 BE)

4. Aufgabe (5 BE)

Betrachten Sie die Teileralgebra T_{42} aller Teiler von 42:

a) Geben Sie alle Elemente von T_{42} an. (1 BE)

b) Zeigen Sie eines der deMorganschen Gesetze für die Elemente 3 und 6. (2 BE)

c) Zeigen Sie, dass eines der Gesetze vom inversen Element für 2 in T_{42} erfüllt ist, und zeigen Sie, dass das für T_{24} nicht gilt. (2 BE)

5. Aufgabe (5 BE)

Geben Sie die ersten 5 Fibonaccizahlen F(n) an und beweisen Sie mit vollständiger Induktion, dass $F(n) = 1 + F(0) + F(1) + \ldots + F(n-2)$ für $n \geq 2$ gilt.

6. Aufgabe (3 BE)

Bestimmen Sie den ggT und das kgV von 28520 und 70587 mit Hilfe des Euklidischen Algorithmus! Geben Sie die Zwischenschritte an!

7. Aufgabe (6 BE)

a) Geben Sie zu jedem Element aus der Gruppe $(\mathbb{Z}_9,+)$ seine Ordnung an! (2 BE)

b) Zeigen Sie, dass $(\mathbb{Z}_9,*)$ keine Gruppe ist, indem Sie alle Elemente angeben, die kein Inverses haben. Geben Sie aber von den anderen Elementen ihr Inverses an! (2 BE)

c) Kann man aus ($\mathbb{Z}_9$, +) mit irgendeiner anderen Operationen $\otimes$ einen Körper machen? Begründen Sie Ihre Antwort! (1 BE)

d) Geben Sie eine Teilmenge T von $\mathbb{Z}_9$ explizit in Elementdarstellung an, sodass (T,*) eine Gruppe ist. (1 BE)

8. Aufgabe (6 BE)

a) Zeigen Sie, dass das Polynom $p(x) = x^3+x+1$ in GF(5) irreduzibel ist. (2 BE)

b) Betrachten Sie die beiden Vektoren (4,0,4) und (0,2,3) als Elemente in GF(125) und multiplizieren Sie diese. Benutzen Sie bei Bedarf das irreduzible Polynom aus a) (4 BE)

9. Aufgabe (4 BE)

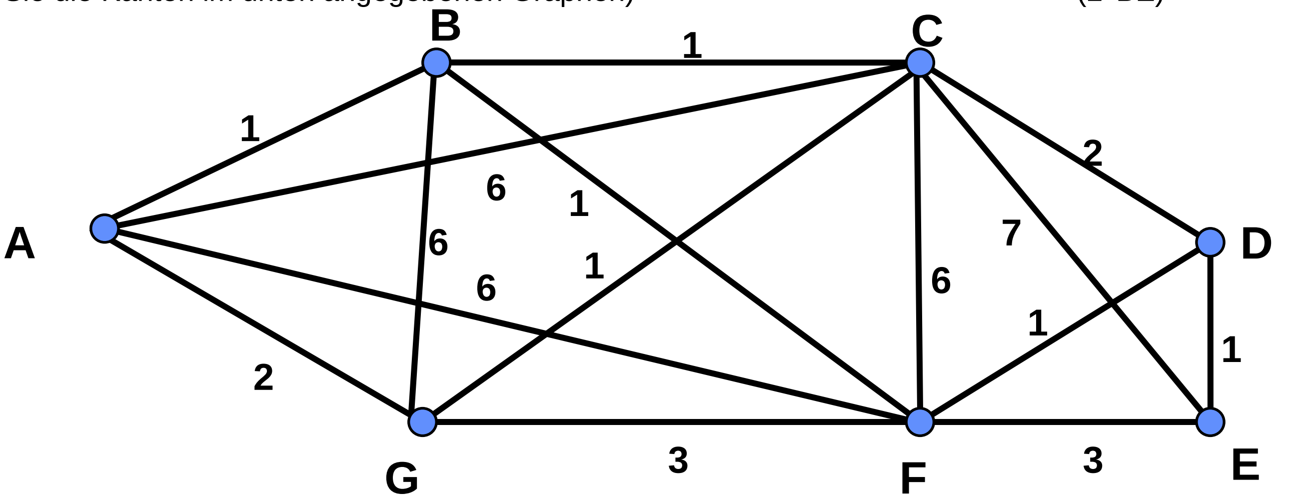
a) Ist die Permutation (1 4 2 5) gerade oder ungerade? Begründen Sie Ihre Antwort! (1 BE)

b) Bestimmen Sie die Ordnung der Permutation (1 4 2 5). Begründen Sie Ihre Antwort! (3 BE)

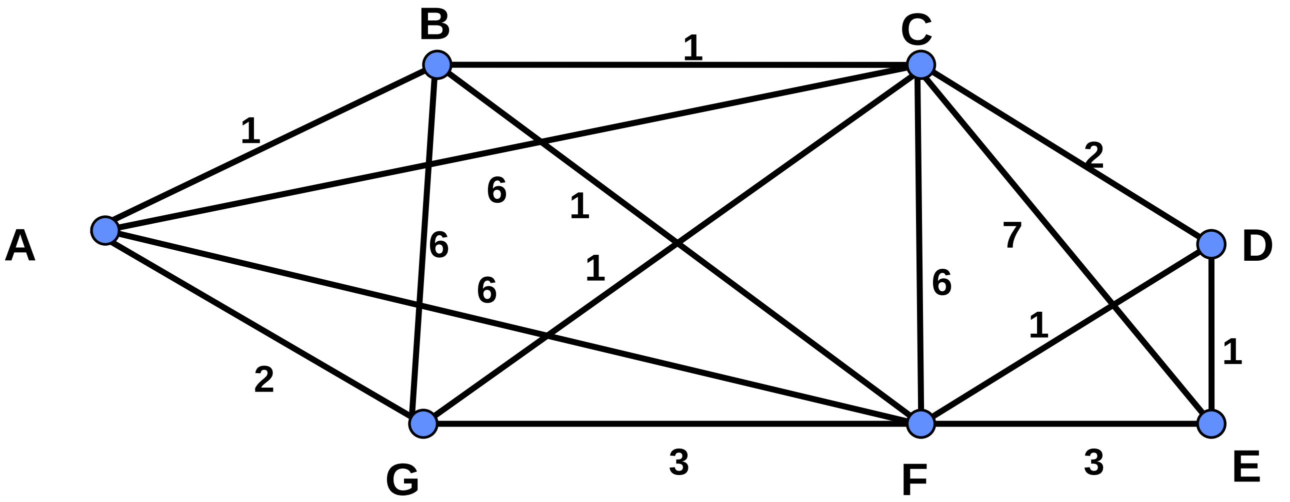
10. Aufgabe (8 BE)

Gegeben sei der unten angegebene Graph.

a) Geben Sie das Gerüst an, welches der Algorithmus von Kruskal berechnet (markieren Sie die Kanten im unten angegebenen Graphen) (2 BE)



b) Geben Sie das Gerüst aus kürzesten Wegen an, welches der Algorithmus von Dijkstra berechnet, wenn er den kürzesten Weg von A nach E berechnen soll (markieren Sie die Kanten im unten angegebenen Graphen) (2 BE)



c) Ist der Graph planar? Begründen Sie Ihre Antwort! (1 BE)

d) Hat der Graph einen Eulerkreis oder einen Eulerweg? Begründen Sie Ihre Antwort! (2 BE)

e) Hat der Graph einen Hamiltonkreis? Begründen Sie Ihre Antwort! (1 BE)