Fachhochschule Wedel 12.02.2018

Prof. Dr. Sebastian Iwanowski

Aufgaben zur Klausur in *Diskrete Mathematik* (WS 2017/18)

Studiengänge B_Inf, B_TInf, B_ITE, B_STec, B_Minf, B_CGT, B_WInf, B_ECom, B_IMCA, Übergangsblock für Masterstudiengänge

Zeit: 120 Minuten,

erlaubte Hilfsmittel: Taschenrechner

Bitte tragen Sie Ihre Antworten und fertigen Lösungen ausschließlich an den freien Stellen nach den jeweiligen Aufgaben ein (ggf. auf der jeweiligen Rückseite weiterschreiben).

Diese Klausur besteht einschließlich dieses Deckblatts aus 6 Seiten.

Für die Klausur werden insgesamt 50 Bewertungseinheiten (BE) vergeben. Zum Bestehen benötigen Sie mindestens 25 BE.

Viel Erfolg !

1. Aufgabe (3 BE)

Geben Sie die folgenden Mengen in Elementschreibweise an.

Hinweis: Alle Mengen sind endlich. $\mathbb{N}$ soll die Null enthalten. (3 BE)

$A = \{x \in \mathbb{N} \mid \exists y \in \mathbb{N}: (10 \bullet y = x) \wedge (y \leq 5)\} =$

$B = \{x \in \mathbb{N} \mid \exists y \in \mathbb{N}: (10 \bullet x = y) \wedge (y \leq 5)\} =$

$C = \{x \in \mathbb{N} \mid \exists y \in \mathbb{N}: x \cdot y = 10\} =$

2. Aufgabe (5 BE)

Gegeben seien die folgenden Mengen:

$A = \{10, 20, 30\}$ $B = \{10\}$ $C = \mathbb{N}$ $D = \{\varnothing, 10, 20\}$

a) Stellen Sie folgende Mengen in Elementschreibweise dar: (4 BE)

$A \cup D =$

$B \cap C =$

$D \cap C =$

$(A \cup D) \setminus (D \cap C) =$

b) Geben Sie die Potenzmenge von $(A \cup D) \setminus (D \cap C)$ an. (1 BE)

Anleitung: Diese und die vorige Menge muss aus Ihren eigenen Ergebnissen zuvor gebildet werden.

3. Aufgabe (8 BE)

Gegeben seien die Mengen A, B, C, D aus Aufgabe 2. Untersuchen Sie die Relation R = „ist Teilmenge von“ auf der Menge {A, B, C, D}:

a) Ist R eine totale oder nichttotale Ordnungs- oder eine Äquivalenzrelation? Begründen Sie alle 3 Antworten, indem Sie die geforderten Eigenschaften überprüfen! (5 BE)

b) Je nach Ausgang der Antwort in a) (nur eines von beiden ist möglich): (3 BE)

i) Erstellen Sie ein Hassediagramm und kennzeichnen Sie die maximalen und minimalen Elemente.

ii) Charakterisieren Sie die Äquivalenzklassen in Worten.

4. Aufgabe (3 BE)

Gegeben seien die Mengen A, C, D aus Aufgabe 2.

Geben Sie Funktionen $f: A \rightarrow C$ sowie $g: C \rightarrow D$ an, sodass f nicht surjektiv und g nicht injektiv ist, aber die Komposition $g \circ f$ bijektiv. Geben Sie die Kompositionsfunktion ebenfalls an. Sie müssen keine der Funktionen als Menge angeben (dürfen aber). Es reicht eine informelle Zuordnungsvorschrift.

5. Aufgabe (5 BE)

Bei den olympischen Winterspielen starten n Abfahrtsskiläufer gegeneinander. Am Ende wird als Ergebnis eine genaue Reihenfolge der Läufer ermittelt, also 1., 2., 3., usw. Die Zeitmessung ist so genau, dass keine 2 Läufer dieselbe Zeit erzielen.

a) Wie viele verschiedene Ergebnisse sind möglich in einem Wettbewerb? (1 BE)

b) Beweisen Sie Ihre Aussage von a) durch vollständige Induktion. (4 BE)

6. Aufgabe (2 BE)

Sie sollen durch Probedivisionen testen, ob 997 eine Primzahl ist. Geben Sie an, mit welchen Teilern Sie das mindestens durchführen müssen und geben Sie an, ob 997 eine Primzahl ist oder nicht.

7. Aufgabe (5 BE)

a) Zeigen Sie, dass ($\mathbb{Z}_{10}$,+) eine Gruppe ist, indem Sie zu jedem Element sein Inverses angeben. (1 BE)

Element:

Inverses:

b) Zeigen Sie, dass ($\mathbb{Z}_{10}$,*) keine Gruppe ist, indem Sie alle Elemente angeben, die kein Inverses haben. (1 BE)

c) Kann man aus $\mathbb{Z}_{10}$ mit irgendwelchen anderen Operationen $\oplus$ und $\otimes$ einen Körper machen? Begründen Sie Ihre Antwort! (1 BE)

d) Geben Sie eine Teilmenge T von $\mathbb{Z}_{10}$ explizit in Elementdarstellung an, die mit der normalen Restklassenoperation * eine Gruppe ist. (2 BE)

8. Aufgabe (6 BE)

a) Berechnen Sie das Polynom $2x^4 + 3x^2 + 3$ modulo $x^3 + x + 3$ in $\mathbb{Z}_7[x]$. (3 BE)

b) Für welchen Körper ist diese Berechnung relevant? (1 BE)

c) Welche Bedingung muss erfüllt sein, damit diese Berechnung verwendet werden kann? Ist diese Bedingung hier erfüllt? Begründen Sie Ihre Antwort. (2 BE)

9. Aufgabe (3 BE)

a) Ist die Permutation (1 3 6) (5 4 2) gerade oder ungerade? Begründen Sie Ihre Antwort. (1 BE)

b) Bestimmen Sie die Ordnung der Permutation (1 3 6) (5 4 2) (mit Zwischenrechnungen) (2 BE)

10. Aufgabe (10 BE)

Gegeben sei der unten angegebene Graph.

a) Geben Sie die Reihenfolge der Knoten an, die der Algorithmus von Dijkstra bei der Berechnung des kürzesten Weges von G nach E als endgültig untersuchte Knoten in die Menge `Berechnet` schiebt! Geben Sie außerdem für jeden dieser Knoten (inklusive G und E) an, welche minimale Zahl der Algorithmus als Grundlage für seine Entscheidung ausgerechnet hat, wenn der Knoten in `Berechnet` geschoben wird. (3 BE)

b) Gibt es einen Eulerkreis oder Eulerweg? Begründen Sie Ihre Antwort für beide Sachverhalte. (2 BE)

c) Geben Sie das Gerüst an, welches der Algorithmus von Kruskal berechnet (markieren Sie die Kanten im unten angegebenen Graphen). (1 BE)

d) Geben Sie die Ecken-Färbungszahl des Graphen an und begründen Sie Ihre Antwort (2 Begründungen: Warum ist die Zahl nicht größer und warum nicht kleiner). (2 BE)

e) Fügen Sie im unten angegebenen Graphen zusätzliche Kanten zwischen die vorhandenen Ecken hinzu, sodass der Graph nicht mehr planar ist. Die Menge der zusätzlichen Kanten soll minimal sein, d.h. bei Hinzufügung einer echten Teilmenge der zusätzlichen Kanten ist der Graph noch planar. Begründen Sie die Nichtplanarität und die Minimalität! (2 BE)