

**Aufgaben zur Klausur in *Diskrete Mathematik* (SS 2017)**

**Studiengänge B\_Inf, B\_TInf, B\_ITE, B\_STec, B\_Minf, B\_CGT, B\_WInf, B\_ECom,  
B\_IMCA, Übergangsblock für Masterstudiengänge**

Zeit: 120 Minuten,

erlaubte Hilfsmittel: Taschenrechner

Bitte tragen Sie Ihre Antworten und eindeutig gekennzeichneten Lösungen ausschließlich an den freien Stellen nach den jeweiligen Aufgaben ein (ggf. auf der freien Seite gegenüber weiterschreiben). Nebenrechnungen können ebenfalls auf der freien Seite gegenüber durchgeführt werden. Falls sie nicht gewertet werden sollen, bitte durchstreichen!

Diese Klausur besteht einschließlich dieses Deckblatts aus 7 Seiten.

Für die Klausur werden insgesamt 58 Bewertungseinheiten (BE) vergeben. Zum Bestehen benötigen Sie mindestens 29 BE.

Viel Erfolg !

## 1. Aufgabe (12 BE)

- a) Geben Sie die folgenden Mengen in Elementarschreibweise an: (4 BE)

$$A = \{x \in \mathbb{Z} \mid \exists y \in \{1, 2, 3\}: x + y = 1\} =$$

$$B = \{x \in \mathbb{Z} \mid \exists y \in \{1, 2, 3\}: x + y = -1\} =$$

$$C = \{x \in \mathbb{Z} \mid \exists y \in \{1, 2, 3\}: (x + y)^2 = 1\} =$$

$$D = \{x \in \mathbb{Z} \mid \exists y \in \{1, 2, 3\}: (x + y)^2 = -1\} =$$

- b) Geben Sie von den folgenden Ausdrücken entweder die Ergebnismenge an oder den Wahrheitswert (ja nach Operator). Als Grundlage müssen Sie Ihr Ergebnis von a) verwenden (egal, ob es richtig oder falsch ist)<sup>1</sup>. (8 BE)

$$A \cup B =$$

$$A \subset C =$$

$$A \cap B =$$

$$D \in A =$$

$$D \subset B =$$

$$B \setminus D =$$

$$(A \cup B) \setminus (B \setminus D) =$$

$$(A \cup B) \subset (B \setminus D) =$$

---

<sup>1</sup> Wer kein vom Datentyp zumindest zulässiges (aber nicht notwendigerweise richtiges) Ergebnis in a) angibt, kann in b) keine Punkte erhalten für alle Aufgaben, in denen diese Menge vorkommt.

## 2. Aufgabe (9 BE)

Gegeben sei die Menge  $M = \{1, 2, 3, 4\}$

Geben Sie die Antworten zu a), c), e) und f) jeweils als Menge in Aufzählungsdarstellung:

- a) Definieren Sie eine Äquivalenzrelation auf  $M$ , welche  $(1,2)$  und  $(2,3)$  enthält, aber nicht  $(3,4)$ . (2 BE)
- b) Zeichnen Sie die zu a) gehörige Partition von  $M$ . (1 BE)
- c) Definieren Sie eine totale Ordnungsrelation auf  $M$ , welche  $(1,2)$  und  $(2,3)$  enthält, aber nicht  $(3,4)$ . (2 BE)
- d) Zeichnen Sie das zu c) gehörige Hasse-Diagramm. (1 BE)
- e) Definieren Sie eine bijektive Funktion auf  $M$ , welche  $(1,2)$  und  $(2,3)$  enthält, aber nicht  $(3,4)$ . (1 BE)
- f) Definieren Sie eine Relation, die sowohl Äquivalenz- als auch Ordnungsrelation ist. (1 BE)
- g) Ist die Relation aus f) auch eine Funktion, und ist sie eine totale Ordnungsrelation? Begründen Sie jeweils Ihre Antwort. (1 BE)

### 3. Aufgabe (4 BE)

Gegeben sei die Boolesche Algebra  $\mathcal{B} = \text{Potenzmenge}(\{1,2\})$  mit den Operationen i), ii), iii):

$$\text{i) } \sim p = \{1,2\} \setminus p \quad \text{ii) } p \oplus q = p \cup q \quad \text{iii) } p \odot q = p \cap q$$

a) Geben Sie alle Elemente von  $\mathcal{B}$  an und kennzeichnen Sie das Null- und das Einselement (mit klarer Angabe, wer was ist). (2 BE)

b) Wählen Sie 2 verschiedene Elemente  $p, q \in \mathcal{B}$  aus, die weder Null- noch Einselement sind, und zeigen Sie für diese Elemente, dass die deMorgansche Regel für  $\sim (p \oplus q)$  gilt. Geben Sie in Ihrer Rechnung auch die Zwischenwerte an. (2 BE)

### 4. Aufgabe (5 BE)

Kevin startet eine Briefkette: Er schreibt 2 Briefe und steckt sie in 2 verschiedene Wedeler Briefkästen. In den Briefen werden die Adressaten gebeten, den Brief zu kopieren und wieder in 2 verschiedene Wedeler Briefkästen zu werfen.

Runde (1) sei die Menge der Adressaten, die von Kevin den Brief bekommen, und für  $i > 1$  sei Runde (i) die Menge der Adressaten, die von einem Menschen aus Runde (i-1) den Brief bekommen.

Anzahl (i) sei die Anzahl der Adressaten von Runde (i).

a) Geben Sie einen maximalen Wert für Anzahl (x) an. (1 BE)

b) Beweisen Sie die Aussage von a) mit vollständiger Induktion. (3 BE)

- c) Wedel hat etwas mehr als 32 800 Einwohner. Bis zu wie vielen Runden hat garantiert noch nicht jeder Einwohner einen Brief erhalten? Begründen Sie Ihre Antwort. (1 BE)

## 5. Aufgabe (4 BE)

Bestimmen Sie den ggT und das kgV von 62604 und 111333 mit Hilfe des Euklidischen Algorithmus. Geben Sie die Zwischenschritte an.

## 6. Aufgabe (5 BE)

- a) Geben Sie die Verknüpfungstabelle für die Gruppe  $((\mathbb{Z}_{18})^*, *)$  an. (3 BE)
- b) Ist diese Gruppe isomorph zur Gruppe der Dreieckssymmetrien? Begründen Sie Ihre Antwort. (1 BE)
- c) Können Sie zu der in a) definierten Verknüpfung noch eine weitere Verknüpfung definieren, sodass aus  $(\mathbb{Z}_{18})^*$  ein Körper wird? Begründen Sie Ihre Antwort. (1 BE)

## 7. Aufgabe (7 BE)

- a) Geben Sie alle Elemente von  $GF(9)$  in Vektorschreibweise an und schreiben Sie zu jedem Element seine Ordnung bezüglich der Addition hinzu. (2 BE)
- b) Multiplizieren Sie in  $GF(9)$  die Elemente  $(1,2)$  und  $(2,1)$ . Transformieren Sie diese dafür in Polynomschreibweise und benutzen Sie das irreduzible Polynom  $x^2 + 1$ . Geben Sie das Ergebnis dann wieder in Vektorschreibweise an. (5 BE)

## 8. Aufgabe (4 BE)

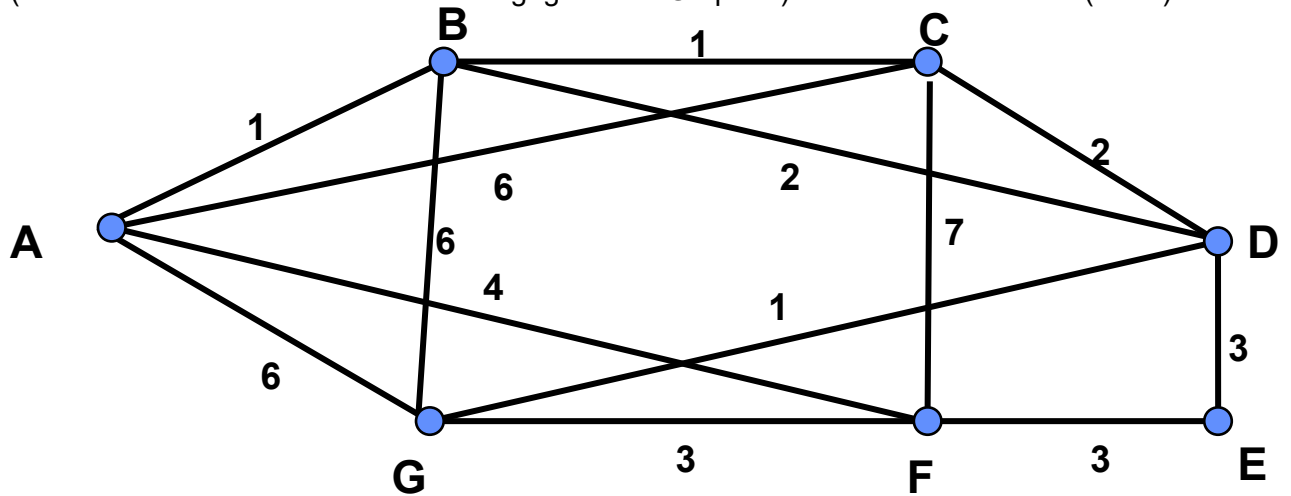
Benutzen Sie die kombinatorische Siebformel (das ist **nicht** das Sieb des Eratosthenes!), um die Anzahl der Primzahlen  $< 50$  zu bestimmen.

Hinweis: Bestimmen Sie die Anzahl von Zahlen, die durch einen Teiler  $j$  teilbar sind. Überlegen Sie sich die Zahlen  $j$ , für die Sie das durchführen müssen, und arbeiten Sie mit der kombinatorischen Siebformel.

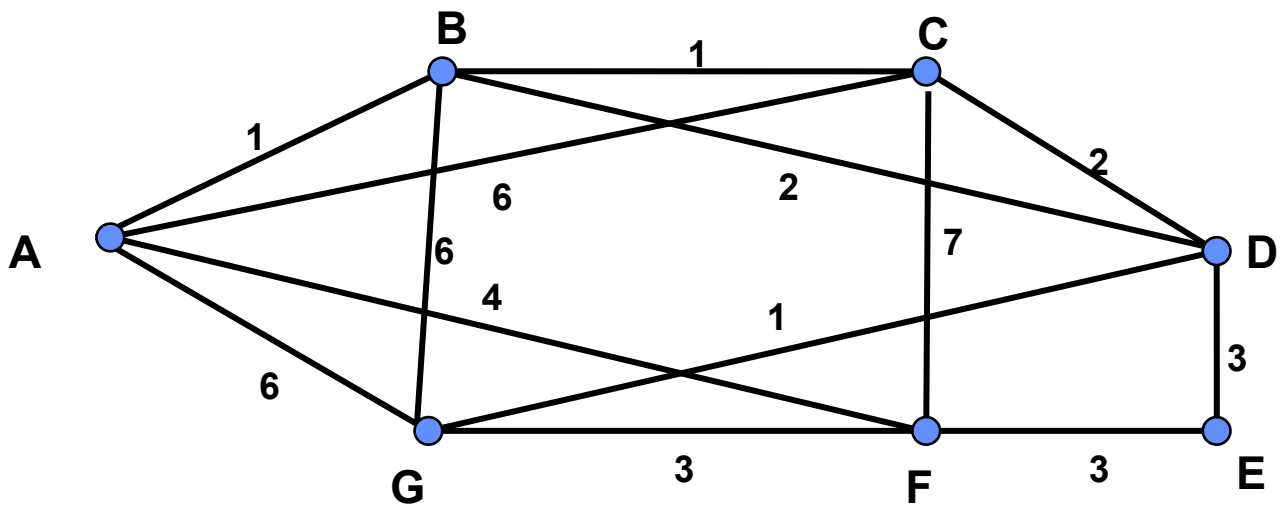
### 9. Aufgabe (8 BE)

Gegeben sei der unten angegebene Graph.

- a) Geben Sie das minimale Gerüst an, welches der Algorithmus von Kruskal berechnet (markieren Sie die Kanten im unten angegebenen Graphen) (2 BE)



- b) Geben Sie das Gerüst aus kürzesten Wegen an, welches der Algorithmus von Dijkstra berechnet, wenn er den kürzesten Weg von A nach E berechnen soll (markieren Sie die Kanten im unten angegebenen Graphen) (2 BE)



- c) Ist der Graph planar? Begründen Sie Ihre Antwort! (2 BE)

- d) Hat der Graph einen Eulerkreis oder einen Eulerweg? Begründen Sie Ihre Antwort! (1 BE)

- e) Hat der Graph einen Hamiltonkreis? Begründen Sie Ihre Antwort! (1 BE)