Fachhochschule Wedel 30.01.2017

Prof. Dr. Sebastian Iwanowski

DM

Aufgaben zur Klausur in *Diskrete Mathematik* (WS 2016/2017)

Studiengänge B_Inf, B_TInf, B_ITE, B_STec, B_Minf, B_CGT, B_WInf, B_ECom, B_IMCA

Zeit: 120 Minuten,

erlaubte Hilfsmittel: Taschenrechner

Bitte tragen Sie Ihre Antworten und eindeutig gekennzeichneten Lösungen ausschließlich an den freien Stellen nach den jeweiligen Aufgaben ein (ggf. auf der freien Seite gegenüber weiterschreiben). Nebenrechnungen können ebenfalls auf der freien Seite gegenüber durchgeführt werden. Falls sie nicht gewertet werden sollen, bitte durchstreichen!

Diese Klausur besteht einschließlich dieses Deckblatts aus 6 Seiten.

Für die Klausur werden insgesamt 60 Bewertungseinheiten (BE) vergeben. Zum Bestehen benötigen Sie mindestens 30 BE.

Viel Erfolg !

1. Aufgabe (8 BE)

Gegeben seien die Mengen $A = \{0, 1, 2\}$, $B = \{(0,1), 2\}$, $C = \{ \{0,1, 2\} \}$, $D = \{(1,0), \{1,2,0\}, 3\}$:

a) Geben Sie von jeder Menge die Anzahl ihrer Elemente an: (1 BE)

A: B: C: D:

b) Geben Sie an, welche Menge Element und welche Menge Teilmenge von einer anderen ist: (2 BE)

c) Geben Sie folgende Mengen explizit an: (5 BE)

$B \cap D =$

$C \cap D =$

$B \setminus D =$

Potenzmenge(C) =

$A \times B =$

2. Aufgabe (8 BE)

Gegeben sei die Menge $M = \{\{a\}, \{a,b\}, \{a,b,c\}, \{c,d\}\}$

Betrachten Sie die Relationen $R_1 = \{(x,y) \in M \times M \mid x \subseteq y\}$ und $R_2 = \{(x,y) \in M \times M \mid x \cap y \neq \{\} \}$

a) Sagen Sie von beiden Relationen, ob es sich um eine Äquivalenzrelation, oder eine partielle oder totale Ordnungsrelation handelt oder nichts von allem. Begründen Sie Ihre Antwort. (6 BE)

R_1 ist

Begründung:

R_2 ist

Begründung:

b) Geben Sie für jede in a) festgestellte Äquivalenzrelation die Äquivalenzklassen an und für jede in a) festgestellte Ordnungsrelation das Hasse-Diagramm: (2 BE)

3. Aufgabe (5 BE)

Folgende Personen werden betrachtet: (mit der Bedeutung Namenskürzel, Geschlecht, Alter):

Anton (A,m,20), Berta (B,w,18), Claudia (C,w,21), Dieter (D,m,18), Erna (E,w,20), Fritz (F,m,20).

a) Geben Sie ein mögliches kartesisches Produkt von Mengen an, von der die eben genannten Tripel Elemente sind: (1 BE)

Betrachten Sie jetzt die Funktion f, welche jedem Namenskürzel das zugehörige Alter zuweist:

b) Geben Sie einen Definitionsbereich und eine Zielmenge für diese Funktion an: (1 BE)

c) Entscheiden Sie, ob f surjektiv oder injektiv ist, und begründen Sie Ihre Antwort: (2 BE)

d) Schreiben Sie die Funktion f explizit als endliche Menge in Elementdarstellung auf: (1 BE)

4. Aufgabe (5 BE)

Definieren Sie für die Menge aller Teiler von 21 eine Boolesche Algebra:

a) Geben Sie die Menge explizit an. (1 BE)

b) Definieren Sie die benötigten Rechenoperationen ~, $\oplus$ und $\odot$. (1 BE)

Hierfür reicht es aus, das Bildungsgesetz anzugeben, d.h. es muss nicht für jedes Element jedes Ergebnis angegeben werden.

c) Geben Sie das Nullelement und das Einselement an: (1 BE)

d) Demonstrieren Sie eine der deMorganschen Regeln an den Elementen 3 und 7: (2 BE)

5. Aufgabe (5 BE)

Gegeben sei folgende Produktionsregel zur Bildung von Wörtern:

$$\vec{x} \in Varname \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{x} = \alpha\beta & \text{für} \quad \alpha, \beta \in \{a, b, c, ..., z\} \\ \vec{x} = \alpha\beta\,\vec{y} & \text{für} \quad \vec{y} \in Varname \quad \text{und} \quad \alpha, \beta \in \{a, b, c, ..., z\} \end{cases}$$

Beweisen Sie folgende Behauptung mit vollständiger Induktion über die Wortlänge:

Die Anzahl |x| der Buchstaben eines Wortes x ist immer eine gerade Zahl.

<u>Hinweis:</u> Sie dürfen den Induktionsschritt auch mit Worten begründen.

6. Aufgabe (2 BE)

Beschreiben Sie kurz in Worten, was Sie tun müssen, um mit dem Sieb des Eratosthenes zu bestimmen, ob die Zahl 10001 eine Primzahl ist: Erwähnen Sie insbesondere, wie ein einzelner Schritt aussieht, von dem Sie viele machen müssen. Bis zu welcher Zahl (konkret in diesem Fall) müssen Sie diesen Schritt durchführen?

Hinweis: Sie müssen den Primzahltest hier nicht wirklich durchführen, denn das dauert zu lange.

7. Aufgabe (5 BE)

Gegeben seien die Gruppen ($\mathbb{Z}_2 x \mathbb{Z}_2$, +), ($\mathbb{Z}_8^*$, *), ($\mathbb{Z}_{10}^*$, *) und ($\mathbb{Z}_{12}^*$, *).

a) Geben Sie jede Menge in Elementdarstellung an: (2 BE)

$\mathbb{Z}_2 x \mathbb{Z}_2$ =

$\mathbb{Z}_8^*$ =

$\mathbb{Z}_{10}^*$ =

$\mathbb{Z}_{12}^*$ =

b) Eine dieser Gruppen ist nicht isomorph zu den anderen: Welche ist das? Begründen Sie Ihre Antwort: (3 BE)

8. Aufgabe (8 BE)

Betrachten Sie den Körper mit 27 Elementen:

a) Bilden Sie ein Polynom, das Sie für die Multiplikation benötigen und weisen Sie eine dafür notwendige Eigenschaft nach. (3 BE)

b) Multiplizieren Sie die Elemente (1,2,1) und (2,1,2). Auch wenn Sie zwischendurch mit Polynomschreibweise rechnen, geben Sie das Ergebnis wieder in Vektorschreibweise an. (5 BE)

9. Aufgabe (3 BE)

a) Ist die Permutation (1 3 5 9) (2 4 6) (5 7 10) gerade oder ungerade? Begründen Sie Ihre Antwort.

(2 BE)

b) Wie viele gerade Permutationen aus Zahlen zwischen 1 und 10 gibt es? (1 BE)

10. Aufgabe (11 BE)

Gegeben sei der untenstehende bewertete Graph.

a) Gesucht sei der kürzeste Weg von A nach F mit Hilfe des Algorithmus von Dijkstra: Zeichnen Sie den Baum, der aus den Ecken besteht, zu denen der Algorithmus den kürzesten Weg ausrechnet, wenn er den Weg nach F ausrechnen soll. Geben Sie für diese Ecken die errechnete Weglänge von A an. (3 BE)

b) Geben Sie einen minimal spannenden Baum an: Zeichnen Sie das Ergebnis direkt in den Graphen unten. (2 BE)

c) Gibt es einen Eulerweg, Eulerkreis oder Hamiltonkreis? Begründen Sie jeweils Ihre Antwort. (2 BE)

d) Geben Sie die (Ecken-)Färbungszahl des Graphen an und begründen Sie, warum nicht mehr und warum nicht weniger. (2 BE)

e) Ist der Graph planar? Begründen Sie Ihre Antwort! (2 BE)