Fachhochschule Wedel 15.08.2016

Prof. Dr. Sebastian Iwanowski

Aufgaben zur Klausur in *Diskrete Mathematik* (SS 2016)

(auch als Schülervorlesung)

Zeit: 120 Minuten,

erlaubte Hilfsmittel: Taschenrechner

Bitte tragen Sie Ihre Antworten und eindeutig gekennzeichneten Lösungen ausschließlich an den freien Stellen nach den jeweiligen Aufgaben ein (ggf. auf der freien Seite gegenüber weiterschreiben). Nebenrechnungen können ebenfalls auf der freien Seite gegenüber durchgeführt werden. Falls sie nicht gewertet werden sollen, bitte durchstreichen!

Diese Klausur besteht einschließlich dieses Deckblatts aus 7 Seiten.

Für die Klausur werden insgesamt 55 Bewertungseinheiten (BE) vergeben. Zum Bestehen benötigen Sie mindestens 27,5 BE.

Viel Erfolg !

1. Aufgabe (11 BE)

a) Geben Sie die folgenden Mengen in Elementschreibweise an: (2 BE)

$A = \{x \in \mathbb{N} \mid \exists y \in \{1,2,3,4\}: y^2 = x\} =$

$B = \{x \in \mathbb{N} \mid \exists y \in \{1,2,3,4\}: x + y = 5\} =$

b) Betrachten Sie diese Mengen A, B, C, D: (9 BE)

$A = \{1, 2, 3\}$; $B = \{ \{1,2,3\} \}$; $C = \{ (1,2,3) \}$; $D = \{1, \{2,3\} \}$

Geben Sie die folgenden Mengen bzw. Wahrheitswerte an:

$A \cup B =$

$A \subset B =$

$A \cap C =$

$A \cap D =$

$A \in B =$

$C \setminus B =$

$C \subset (B \cup C) =$

$B \times C =$

Potenzmenge (D) =

2. Aufgabe (4 BE)

a) Konstruieren Sie eine Relation auf $\{x \in N \mid x < 4\}$, die reflexiv, symmetrisch und antisymmetrisch ist. Geben Sie die Relation als Menge in Aufzählungsschreibweise an. (1 BE)

b) Ist diese Relation auch transitiv? Begründen Sie Ihre Antwort. (1 BE)

c) Ist diese Relation eine Äquivalenz- oder Ordnungsrelation oder eine Funktion? Begründen Sie Ihre Antwort. (2 BE)

3. Aufgabe (6 BE)

Gegeben sei die Menge $M = \{a, b, c\}$

a) Konstruieren Sie eine Äquivalenzrelation f auf M, welche das Element (a,b) enthält, aber nicht (b,c). Geben Sie die Relation als Menge in Aufzählungsschreibweise und ferner ihre Äquivalenzklassen an.

b) Konstruieren Sie eine totale Ordnungsrelation g auf M, welche das Element (a,b) enthält, aber nicht (b,c). Geben Sie die Relation als Menge in Aufzählungsschreibweise und ferner das Hassediagramm an.

c) Geben Sie die Komposition $f \circ g$ als Menge in Aufzählungsschreibweise an.

4. Aufgabe (4 BE)

a) Geben Sie zwei verschiedene Elemente der Booleschen Schaltfunktionen für n = 2 an.

b) Weisen Sie für die in a) angegebenen Elemente die deMorganschen Regeln nach.

5. Aufgabe (6 BE)

a) Beweisen Sie durch vollständige Induktion:

Wenn in einer Meisterschaft mit n Fußballmannschaften jede Mannschaft gegen jede andere genau einmal spielen soll, dann gibt es insgesamt $\binom{n}{2}$ Spiele. (5 BE)

b) Wie viele Spiele gibt es also in einer Runde der Bundesliga (18 Mannschaften)?

6. Aufgabe (6 BE)

a) Geben Sie zu jedem Element aus der Gruppe ($\mathbb{Z}_{10}$,+) seine Ordnung an! (2 BE)

b) Zeigen Sie, dass ($\mathbb{Z}_{10}$,*) keine Gruppe ist, indem Sie alle Elemente angeben, die kein Inverses haben. Geben Sie aber von den anderen Elementen ihr Inverses an! (2 BE)

c) Kann man aus ($\mathbb{Z}_{10}$, +) mit irgendeiner anderen Operation $\otimes$ einen Körper machen? Begründen Sie Ihre Antwort! (1 BE)

d) Geben Sie eine Teilmenge T von $\mathbb{Z}_{10}$ explizit in Elementdarstellung an, sodass (T,*) eine Gruppe ist. (1 BE)

7. Aufgabe (5 BE)

a) Weisen Sie nach, dass das Polynom $g(x) = x^2 + 2$ als irreduzibles Polynom für Berechnungen in GF(25) genommen werden kann. (2 BE)

b) Multiplizieren Sie in GF (25) die Elemente (1,4) und (3,2). Transformieren Sie es dafür in Polynomschreibweise und benutzen Sie das irreduzible Polynom aus a). Geben Sie das Ergebnis dann wieder in Vektorschreibweise an! (3 BE)

8. Aufgabe (4 BE)

a) Stellen Sie die Permutation (1 3 5 7 9) als Funktion dar, indem Sie alle Funktionswerte explizit angeben, also: (1 BE)

f(1)= f(2)= f(3)= f(4)= f(5)= f(6)= f(7)= f(8)= f(9)= f(10)=

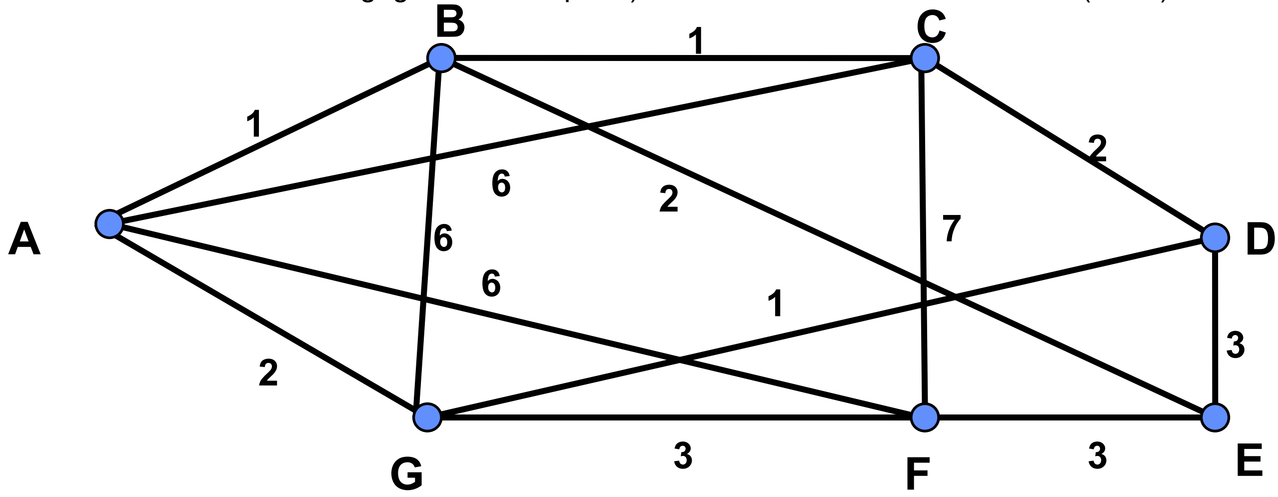
b) Ist die Permutation (1 3 5 7 9) gerade oder ungerade? Begründen Sie Ihre Antwort! (1 BE)

c) Zerlegen Sie die Permutation (1 3 5 7 9) in eine Komposition von Transpositionen. Verwenden Sie 2 Transpositionen mehr als minimal notwendig, aber so, dass keine zwei gleichen nebeneinander liegen. (2 BE)

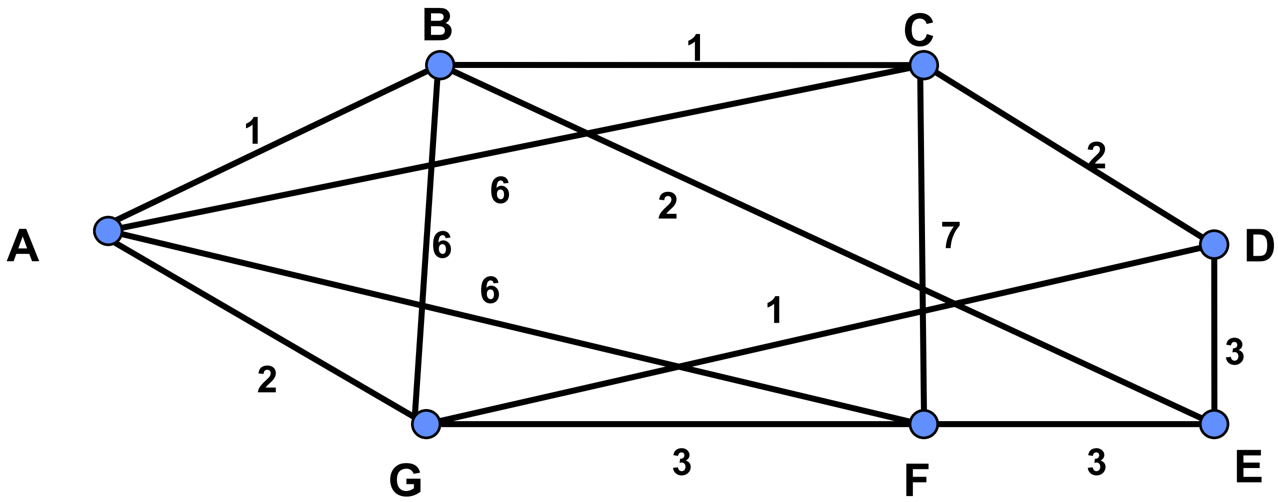
9. Aufgabe (9 BE)

Gegeben sei der unten angegebene Graph.

a) Geben Sie das Gerüst an, welches der Algorithmus von Kruskal berechnet (markieren Sie die Kanten im unten angegebenen Graphen) (2 BE)



b) Geben Sie das Gerüst aus kürzesten Wegen an, welches der Algorithmus von Dijkstra berechnet, wenn er den kürzesten Weg von A nach E berechnen soll (markieren Sie die Kanten im unten angegebenen Graphen) (2 BE)



c) Ist der Graph planar? Begründen Sie Ihre Antwort! (2 BE)

d) Hat der Graph einen Eulerkreis oder einen Eulerweg? Begründen Sie Ihre Antwort! (2 BE)

e) Hat der Graph einen Hamiltonkreis? Begründen Sie Ihre Antwort! (1 BE)