Fachhochschule Wedel
Prof. Dr. Sebastian Iwanowski

01.02.2016

Aufgaben zur Klausur in

***Diskrete Mathematik* (WS 2015/2016)**

Studiengänge B_Inf, B_TInf, B_ITE, B_Minf, B_CGT B_WInf, B_ECom

Zeit: 120 Minuten,

erlaubte Hilfsmittel: Taschenrechner

Bitte tragen Sie Ihre Antworten und Begründungen ausschließlich an den freien Stellen nach den jeweiligen Aufgaben ein (ggf. auf der jeweiligen Rückseite weiterschreiben).

Diese Klausur besteht einschließlich dieses Deckblatts aus 6 Seiten.

Für die Klausur werden insgesamt 46 Bewertungseinheiten (BE) vergeben. Zum Bestehen benötigen Sie mindestens 23 BE.

Viel Erfolg !

1. Aufgabe (8 BE)

Gegeben seien die Mengen A = {1, 2, 3}, B = {1, (2,3)}, C = {1, {2,3}}, D = { (1,2,3) }.

Aus diesen Mengen sei die Menge M = {A, B, C, D} gebildet.

Die Relation R auf M ist folgendermaßen definiert: Ein Element steht zu einem anderen Element in Relation, wenn die beiden Elemente eine nichtleere Schnittmenge haben.

a) Geben Sie die Vereinigungsmenge aus allen Mengen A, B, C. D in Elementdarstellung an und nennen Sie die Gesamtanzahl der Elemente. (2 BE)

b) Geben Sie Relation R als Menge in Elementdarstellung an (mit Symbolen A,B,C,D)! (2 BE)

c) Untersuchen Sie, ob R eine Äquivalenzrelation oder eine Ordnungsrelation ist und begründen Sie Ihre Antwort zu beiden Sachverhalten. (3 BE)

d) Je nach Ausgang der Antwort in c) (nur eines von beiden ist möglich): (1 BE)

   i) Erstellen Sie ein Hassediagramm und kennzeichnen Sie die maximalen und minimalen Elemente.

   ii) Geben Sie die Äquivalenzklassen an.

2. Aufgabe (3 BE)

Gegeben seien die Mengen A = {a, b}, B = {1, 2, 3}, C = {a, b}

a) Geben Sie Funktionen $f: A \to B$ sowie $g: B \to C$ an, sodass f nicht surjektiv und g nicht injektiv ist, aber die Komposition $g \circ f$ bijektiv. (2 BE)

b) Können Sie Aufgabe a) auch lösen, wenn f und g beide bijektiv sein sollen? Begründen Sie Ihre Antwort! (1 BE)

3. Aufgabe (4 BE)

Gegeben sei die Boolesche Algebra $\mathscr{B} = \{m \in \mathbb{N}: m \text{ teilt } 35\}$ mit den Operationen i), ii), iii):

i) $\sim p = 35 / p$ ii) $p \oplus q = \text{ggT}(p,q)$ iii) $p \odot q = \text{kgV}(p,q)$

a) Geben Sie alle Elemente von $\mathscr{B}$ explizit an und benennen Sie das Nullelement und das Einselement! (2 BE)

b) Führen Sie die Gültigkeit eines der deMorganschen Gesetze für die Elemente 5 und 35 vor: Geben Sie die Zwischenergebnisse an! (2 BE)

4. Aufgabe (4 BE)

Für einen Menschen ist die n-te Vorfahrengeneration $V_n(m)$ als Menge so definiert:

$V_0(m) = \{m\}$ Für $n>0$ gilt: $V_n(m) = V_{n-1}(\text{Vater}(m)) \cup V_{n-1}(\text{Mutter}(m))$

Die erste Vorfahrensgeneration sind also die Eltern, die zweite die Großeltern, u.s.w.

Nehmen Sie an, dass alle Vorfahren eines Menschen in derselben Generation keine gemeinsamen Vorfahren haben, d.h. alle Großeltern sind untereinander nicht verwandt, ebenso nicht die Urgroßeltern, u.s.w.

Beweisen Sie mit vollständiger Induktion: $|V_n(m)| = 2^n$

5. Aufgabe (3 BE)

Bestimmen Sie den ggT und das kgV von 8769 und 87769 mit Hilfe des Euklidischen Algorithmus! Geben Sie die Zwischenschritte an!

6. Aufgabe (4 BE)

Betrachten Sie die Gruppen ($\mathbb{Z}_6$,+) und ($\mathbb{Z}^*{}_9$,*):

a) Geben Sie für jede Gruppe die Elemente explizit an und weisen Sie diesen die Ordnungszahlen zu! (3 BE)

b) Geben Sie eine Isomorphismus-Abbildung zwischen diesen Gruppen an. (1 BE)

7. Aufgabe (6 BE)

a) Berechnen Sie das Polynom $(3x^3 + 4x^2 + 2x)$ modulo $(x^2 + x + 4)$ in $\mathbb{Z}_7[x]$. (3 BE)

b) Für welchen Körper ist diese Berechnung relevant? (1 BE)

c) Welche Bedingung muss erfüllt sein, damit Sie diese Rechnung hier zur Erstellung einer Multiplikationstabelle verwenden können? Ist diese Bedingung hier erfüllt? Begründen Sie Ihre Antwort! (2 BE)

8. Aufgabe (4 BE)

Gegeben sei die Permutation (2 5 1 3) (4 6 8 9) (11 10 7) in Zyklendarstellung:

a) Geben Sie diese Permutation als Permutationstabelle an! (2 BE)

b) Ist die Permutation gerade oder ungerade? Begründen Sie Ihre Antwort! (1 BE)

c) Geben Sie eine andere Darstellung für dieselbe Permutation an, indem Sie noch weitere Zyklen einfügen! (1 BE)

9. Aufgabe (10 BE)

Gegeben sei der unten angegebene Graph (beide Seiten stellen denselben Graphen dar).

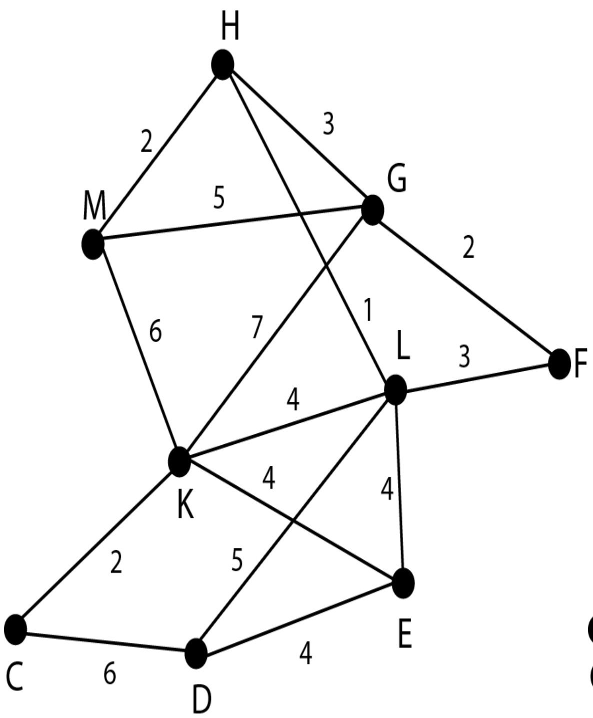
a) Zeichnen Sie unten links das Gerüst ein, welches der Algorithmus von Dijkstra berechnet, wenn der kürzeste Weg von K nach D gesucht wird. Schreiben Sie neben jeden Knoten die Markierung, welche der Algorithmus bis zum Abbruch ausgerechnet hat. Geben Sie hier in Worten an, was das Gerüst optimiert: (3 BE)

b) Zeichnen Sie unten rechts das Gerüst ein, welches der Algorithmus von Kruskal berechnet und geben Sie hier in Worten an, was das Gerüst optimiert: (2 BE)

c) Ist der Graph planar? Falls ja, begründen Sie das und geben Sie eine zulässige minimale Färbung seiner Länder an. Falls nein, begründen Sie das und geben Sie eine zulässige Färbung seiner Knoten an (nutzen Sie den linken Graphen) (3 BE)
Hinweis: Um keine Verwechslung mit Aufgaben a) und b) zu bekommen, benennen Sie die Farben mit kleinen Buchstaben (a,b,c,…).

d) Gibt es einen Eulerweg? (nicht Kreis!) Falls ja, zeichnen Sie ihn ein (nutzen Sie den rechten Graphen), falls nein, begründen Sie, warum es keinen gibt. (2 BE)

a),c)



b),d)