Fachhochschule Wedel
Prof. Dr. Sebastian Iwanowski

02.02.2015

**DM alt**

**Aufgaben zur Klausur in**

***Diskrete Mathematik mit Anwendungsvorlesung* (WS 2014/2015)**

**Studiengänge B_Inf, B_WInf, B_ECom (alte Studienordnungen)**

Zeit: 180 Minuten,

erlaubte Hilfsmittel: Taschenrechner

Bitte tragen Sie Ihre Antworten und fertigen Lösungen ausschließlich an den freien Stellen nach den jeweiligen Aufgaben ein (ggf. auf der Rückseite gegenüber weiterschreiben).

Diese Klausur besteht einschließlich dieses Deckblatts aus 11 Seiten. Die Aufgaben 1 bis 8 beziehen sich auf die Grundvorlesung und die Aufgaben 9 bis 13 auf die Anwendungsvorlesung.

Für die Klausur werden insgesamt 82 Bewertungseinheiten (BE) vergeben. Zum Bestehen benötigen Sie mindestens 41 BE.

Viel Erfolg !

# 1. Aufgabe (10 BE)

a) Geben Sie die folgenden Mengen in Elementschreibweise an. Bei unendlichen Mengen geben Sie mindestens die ersten 4 Zahlen an und vervollständigen Sie mit Pünktchen (Bsp.: {0,1,2,3,…}). (3 BE)

$A = \{x \in \mathbb{N} \mid x^2 \leq 0\} =$

$B = \{x \in \mathbb{N} \mid x^2 > 0\} =$

$C = \{x \in \mathbb{N} \mid \exists y \in \mathbb{N}: \; y^2 = x\} =$

b) Geben Sie eine Teilmengenbeziehung zwischen Mengen in a) an. (1 BE)

c) Berechnen Sie folgende Mengen und stellen Sie das Ergebnis dar wie in a) oder geben Sie ein einzelnes Mengensymbol an (wenn möglich). (6 BE)

$A \cup B =$

$A \cap C =$

$B \cap C =$

$(B \cap C) \setminus (A \cup B) =$

$(B \cap C) \setminus (A \cap C) =$

Potenzmenge von $(A \cap C) \setminus (B \cap C) =$

# 2. Aufgabe (10 BE)

Gegeben sei die Menge M aller Teiler von 42.

a) Geben Sie M explizit in Elementschreibweise an. (1 BE)

Betrachten Sie die Relation $R = \{(x,y) \in M \times M$: x ist Teiler von y$\}$:

b) Begründen Sie, dass R eine partielle Ordnungsrelation ist, indem Sie die 4 dafür relevanten Eigenschaften überprüfen. (4 BE)

c) Erstellen Sie ein Hassediagramm für R und kennzeichnen Sie die maximalen und minimalen Elemente. (3 BE)

d) Betrachten Sie die Boolesche Algebra, die entsteht, wenn für M als additive Verknüpfung der ggT, als multiplikative das kgV und als Negierung zu x die Operation 42/x definiert wird: Überprüfen Sie die Gültigkeit einer deMorganschen Regel für 2 verschiedene Elemente von M. Belegen Sie die Gültigkeit durch Angabe der Zwischenwerte. (2 BE)

## 3. Aufgabe (4 BE)

Beweisen Sie mit vollständiger Induktion über n:

Es gibt zu einer gegebenen natürlichen Zahl n genau (n+1)! verschiedene (n+1)-Tupel aus den Zahlen {0,1,2,…n}, in denen jede Zahl genau einmal vorkommt.

## 4. Aufgabe (4 BE)

Bestimmen Sie den ggT und das kgV von 101303 und 647309 mit Hilfe des Euklidischen Algorithmus. Geben Sie die Zwischenschritte an.

## 5. Aufgabe (7 BE)

a) Zeigen Sie, dass $(\mathbb{Z}_6,+)$ eine Gruppe ist, indem Sie zu jedem Element sein Inverses angeben. (2 BE)

b) Zeigen Sie, dass $(\mathbb{Z}_6,*)$ keine Gruppe ist, indem Sie alle Elemente angeben, die kein Inverses haben. Begründen Sie Ihre Antwort. (2 BE)

c) Kann man aus $\mathbb{Z}_6$ mit irgendwelchen anderen Operationen $\oplus$ und $\otimes$ einen Körper machen? Begründen Sie Ihre Antwort! (1 BE)

d) Geben Sie eine Teilmenge T von $\mathbb{Z}_6$ explizit in Elementdarstellung an, die mit der normalen Restklassenoperation * eine Gruppe ist. (1 BE)

e) Geben Sie einen einfachen Grund an, warum $(\mathbb{Z}_6,+)$ und die Gruppe $S_3$ der Symmetrien eines gleichseitigen Dreiecks nicht isomorph sind, obwohl sie beide 6 Elemente haben (1 BE)

# 6. Aufgabe (5 BE)

Arbeiten Sie in GF(9) mit folgender Benennung der Elemente:

$$\begin{array}{ccccccccccc} \{ & 0, & 1, & 2, & x, & x+1, & x+2, & 2x, & 2x+1, & 2x+2 & \} \\ & 0, & 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7, & 8 & \end{array}$$

Benutzen Sie folgende Rechentabellen:

| $\oplus$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| 1 | 1 | 2 | 0 | 4 | 5 | 3 | 7 | 8 | 6 |
| 2 | 2 | 0 | 1 | 5 | 3 | 4 | 8 | 6 | 7 |
| 3 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 0 | 1 | 2 |
| 4 | 4 | 5 | 3 | 7 | 8 | 6 | 1 | 2 | 0 |
| 5 | 5 | 3 | 4 | 8 | 6 | 7 | 2 | 0 | 1 |
| 6 | 6 | 7 | 8 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 7 | 7 | 8 | 6 | 1 | 2 | 0 | 4 | 5 | 3 |
| 8 | 8 | 6 | 7 | 2 | 0 | 1 | 5 | 3 | 4 |

| $\odot$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| 2 | 0 | 2 | 1 | 6 | 8 | 7 | 3 | 5 | 4 |
| 3 | 0 | 3 | 6 | 2 | 5 | 8 | 1 | 4 | 7 |
| 4 | 0 | 4 | 8 | 5 | 6 | 1 | 7 | 2 | 3 |
| 5 | 0 | 5 | 7 | 8 | 1 | 3 | 4 | 6 | 2 |
| 6 | 0 | 6 | 3 | 1 | 7 | 4 | 2 | 8 | 5 |
| 7 | 0 | 7 | 5 | 4 | 2 | 6 | 8 | 3 | 1 |
| 8 | 0 | 8 | 4 | 7 | 3 | 2 | 5 | 1 | 6 |

a) Demonstrieren Sie die Gültigkeit des Distributivgesetzes anhand der Tabelle, indem Sie es mit den Elementen 3,4 und 5 vorführen. Geben Sie dafür auch die Zwischenwerte an. (2 BE)

b) Zeigen Sie, dass das Polynom $p(x) = x^2+1$ irreduzibel ist. (1 BE)

c) Multiplizieren Sie das 3. mit dem 7. Element mit Hilfe des in b) angegebenen irreduziblen Polynoms und vergleichen Sie das mit der Tabelle. (2 BE)

## 7. Aufgabe (3 BE)

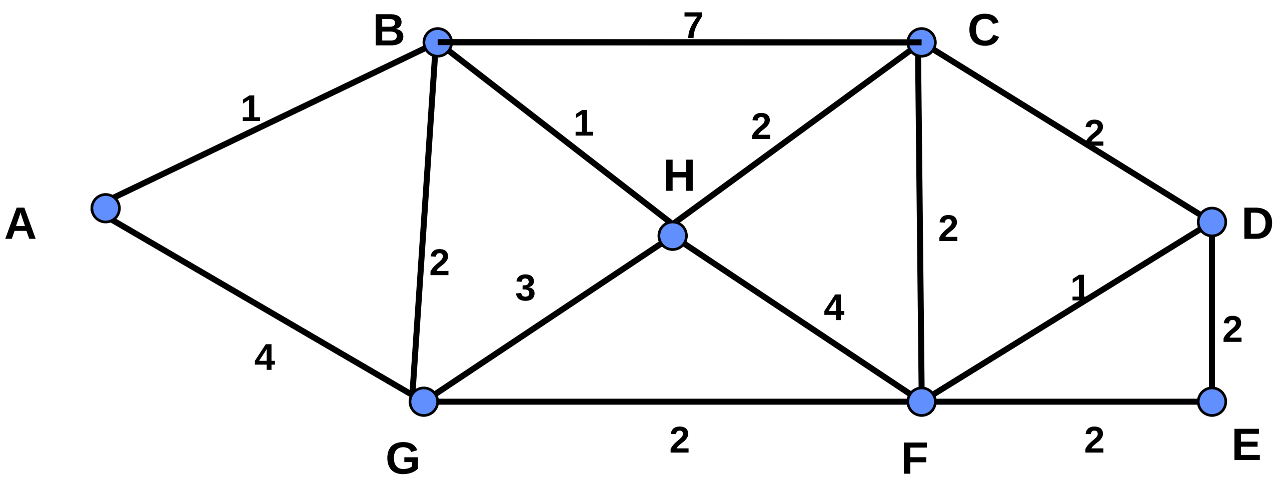
a) Ist die Permutation (10 3) (5 14 13) (9 2 8 1) (11 6 7 12 4) gerade oder ungerade? Begründen Sie Ihre Antwort! (2 BE)

b) Geben Sie das Inverse der oben genannten Permutation bezüglich der Verknüpfung Hintereinanderschaltung (Komposition) an. (1 BE)

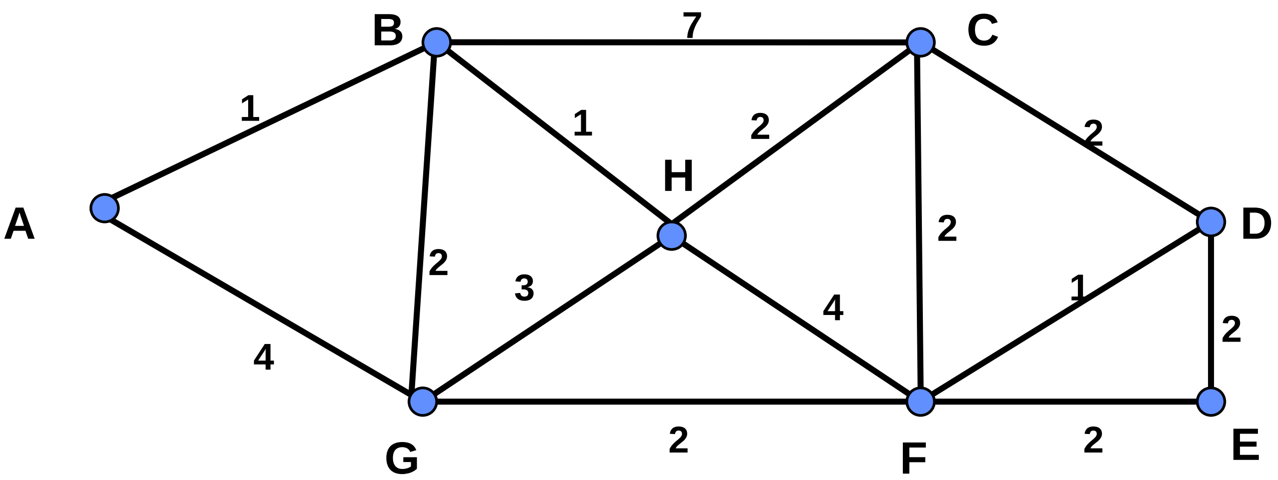
## 8. Aufgabe (11 BE)

Gegeben ist im Folgenden immer derselbe Graph.

a) Zeichnen Sie das Gerüst ein, das der Algorithmus von Dijkstra berechnet, wenn er A als Startpunkt und F als Zielpunkt bekommt. Markieren Sie die bereits endgültig berechneten Knoten mit der Länge des bis dorthin berechneten kürzesten Weges. (3 BE)

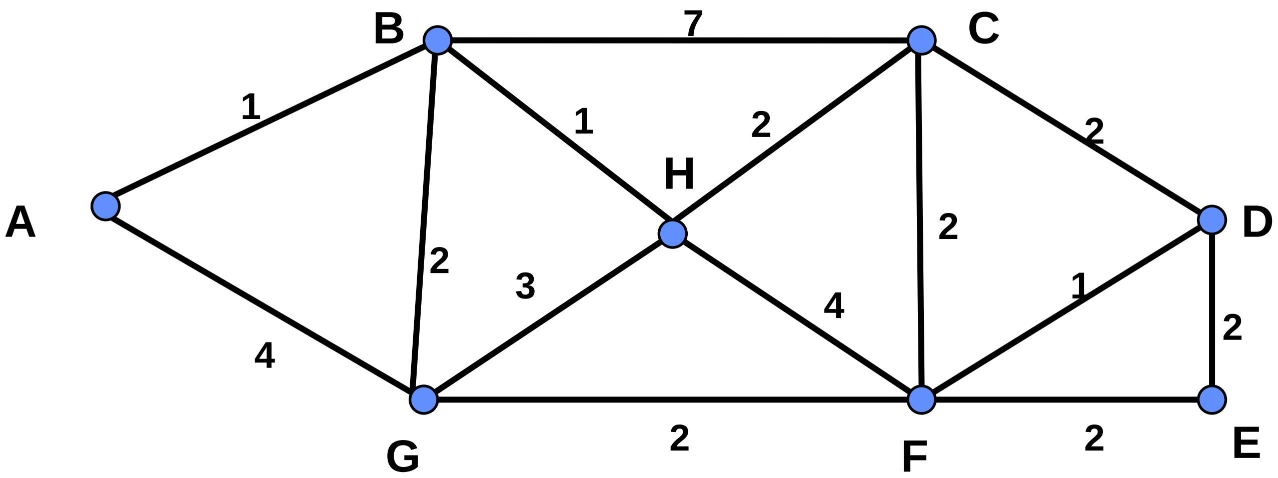



b) Zeichnen Sie das Gerüst ein, welches der Algorithmus von Kruskal berechnet. (2 BE)



c) Geben Sie die Ecken-Färbungszahl des Graphen an und begründen Sie Ihre Antwort (2 Begründungen: Warum ist die Zahl nicht größer und warum nicht kleiner). (2 BE)

d) Fügen Sie im Graphen zusätzliche Kanten zwischen die vorhandenen Ecken hinzu, sodass der Graph nicht mehr planar ist. Die Menge der zusätzlichen Kanten soll minimal sein, d.h. bei Hinzufügung echten Teilmenge der zusätzlichen Kanten ist der Graph noch planar. (2 BE)




e) Hat der Graph einen Eulerkreis oder Eulerweg? Begründen Sie Ihre Antwort. (2 BE)

## 9. Aufgabe (3 BE)

Gegeben sei die Formel F: $(a \rightarrow (a \wedge b)) \vee (b \rightarrow \neg a)$

Bringen Sie F in eine konjunktive Normalform mit möglichst wenigen Klauseln! (3 BE)

## 10. Aufgabe (7 BE)

Gegeben seien die folgenden Prädikate mit den zugehörigen Bedeutungen:

| | |
|---|---|
| B(x,y) | Studierende(r) x hat das Fach y bestanden. |
| T(x,y) | Studierende(r) x hat an der Prüfung im Fach y teilgenommen. |
| P(y) | y ist ein praktisches Fach (Gegenteil: theoretisches Fach) |

Außerdem beschreibe die Menge S alle Studierenden und die Menge F alle Fächer.

Beschreiben Sie die folgenden Aussagen mit jeweils einem prädikatenlogischen Ausdruck, der *ausschließlich* die Prädikate B, T oder K verwendet! Hierbei seien Alex und Berta Studierende aus S, und Ana, DM und PS1 Fächer aus F.

a) Ana und DM sind theoretische Fächer, während PS1 ein praktisches Fach ist. (1 BE)

b) Alex hat alle Fächer bestanden, die theoretische Fächer sind. (2 BE)

c) Linda hat jedes Fach bestanden, an dessen Prüfung sie teilgenommen hat. (2 BE)

d) Alle Studierenden, die ein Fach bestanden haben, haben auch an der Prüfung in diesem Fach teilgenommen. (2 BE)

## 11. Aufgabe (6 BE)

a) Finden Sie zum folgenden Programmausschnitt und der gegebenen Nachbedingung die schwächste Vorbedingung!
Vereinfachen Sie die Bedingungen so weit wie möglich (aber nicht noch weiter!)
Geben Sie alle Zwischenschritte Ihrer Beweiskette an! (4 BE)

b) Geben Sie eine Belegung für x und y an, welche die gegebene Nachbedingung erfüllt und die then-Anweisung durchläuft und geben Sie eine Belegung an, welche die gegebene Nachbedingung erfüllt und die else-Anweisung durchläuft! (2 BE)

```
if x > y
   then
      begin



         x := - x;



         y := - x
      end
   else
      begin



         y := - y;



         x := - y
      end
{x > y}
```

## 12. Aufgabe (8 BE)

Gegeben sei die folgende Funktion f:

```
procedure f (n: integer, m: integer): integer
begin
  result := 1;
  k := n;
  while (k > 0) do
    begin
      result := result * m;
      k := k-1;
    end;
  return result;
end {f}
```

a) Seien $\mathbf{result}_i$ und $\mathbf{k}_i$ die Werte der Variablen nach dem i-ten Schleifendurchlauf. Bestimmen Sie diese Werte durch eine nichtrekursive Formel und beweisen Sie diese durch vollständige Induktion über i. (5 BE)

b) Folgern Sie aus a), wann die Schleife abbricht und folgern Sie daraus, welche Werte für alle Variablen zum Schluss berechnet werden (also nicht nur der Rückgabewert von f). Geben Sie gegebenenfalls eine Vorbedingung an, die für Ihre Lösung gelten muss! (3 BE)

## 13. Aufgabe (4 BE)

Gegeben sei folgende Funktion f:

```
procedure f(x: ℕ): ℕ;
begin
 if (x MOD 2 = 0)
    then return x+1
    else return f(x-1)+1
end
```

a) Von welchem Typ ist die Rekursion? Wenn mehrere Antworten möglich sind, dann geben Sie nur den speziellsten Typ an! Begründen Sie Ihre Antwort und geben Sie an, warum die anderen Typen nicht gelten! (3BE)

b) Was berechnet die Funktion in Abhängigkeit von x? (1BE)