Fachhochschule Wedel 01.09.2014

Prof. Dr. Sebastian Iwanowski

Aufgaben zur Klausur in

***Diskrete Mathematik (Grund- und Anwendungsvorlesung)* (SS 2014)**

Studiengänge B_Inf, B_TInf, B_Minf, B_WInf, B_ECom

Zeit: 180 Minuten,

erlaubte Hilfsmittel: Taschenrechner

Bitte tragen Sie Ihre Antworten und eindeutig gekennzeichneten Lösungen ausschließlich an den freien Stellen nach den jeweiligen Aufgaben ein (ggf. auf der freien Seite gegenüber weiterschreiben). Nebenrechnungen können ebenfalls auf der freien Seite gegenüber durchgeführt werden. Falls sie nicht gewertet werden sollen, bitte durchstreichen!

Diese Klausur besteht einschließlich dieses Deckblatts aus 12 Seiten. Die Aufgaben 1 bis 12 beziehen sich auf die Grundvorlesung und die Aufgaben 13 bis 17 auf die Anwendungsvorlesung.

Für die Klausur werden insgesamt 90 Bewertungseinheiten (BE) vergeben. Zum Bestehen benötigen Sie mindestens 45 BE.

Viel Erfolg !

1. Aufgabe (5 BE)

Betrachten Sie die Mengen A = {1,2}; B = {2,3} und C = {a,b}

a) Geben Sie die Menge $D = (A \cup B) \times C$ in Elementschreibweise an. (2 BE)

b) Wenden Sie auf die Formel von D das Distributivgesetz („Ausmultiplizieren“) an und geben Sie die daraus resultierende rechte Seite an. (1 BE)

c) Setzen Sie in die beiden im Ergebnis von b) enthaltenen kartesischen Mengenprodukte das konkrete Beispiel ein und geben Sie die Mengen in Elementdarstellung an. Begründen Sie, warum Sie damit das Distributivgesetz für dieses Beispiel demonstriert haben. (2 BE)

2. Aufgabe (6 BE)

Konstruieren Sie eine Äquivalenzrelation S, die aus genau 3 Äquivalenzklassen besteht. Dabei soll die erste Äquivalenzklasse aus genau einem Element, die zweite aus genau zwei Elementen und die dritte aus genau drei Elementen bestehen.

Gehen Sie dafür in folgenden Schritten vor:

a) Geben Sie eine Grundmenge M an, sodass $S \subset M \times M$ gilt. (1 BE)

b) Definieren Sie dann die 3 Äquivalenzklassen wie oben verlangt und schreiben Sie diese in Elementdarstellung auf. (2 BE)

c) Schreiben Sie die Relation S in Elementdarstellung auf. (3 BE)

3. Aufgabe (6 BE)

Gegeben seien die Mengen $M = \{1,2,3\}$ und $N = \{a,b,c,d\}$.

a) Versuchen Sie eine Funktion $M \rightarrow N$ zu konstruieren, die injektiv ist. Falls das geht, geben Sie die Funktion an, falls nicht, begründen Sie, warum es nicht geht. (2 BE)

b) Versuchen Sie eine Funktion $M \rightarrow N$ zu konstruieren, die surjektiv ist. Falls das geht, geben Sie die Funktion an, falls nicht, begründen Sie, warum es nicht geht. (2 BE)

c) Versuchen Sie eine Funktion $M \rightarrow N$ zu konstruieren, die bijektiv ist. Falls das geht, geben Sie die Funktion an, falls nicht, dann verändern Sie die Menge M so, dass es doch geht und geben Sie die Funktion dann an. (2 BE)

4. Aufgabe (5 BE)

Betrachten Sie die Menge der Booleschen Schaltfunktionen für n = 2:

$\mathscr{B} = \{f:\{0,1\}^2 \rightarrow \{0,1\}\}$ mit den Operationen i), ii), iii):

i) $\sim f(x_1,x_2) = 1 - f(x_1,x_2)$

ii) $(f \oplus g)(x_1,x_2) = \max \{f(x_1,x_2), g(x_1,x_2)\}$

iii) $(f \bullet g)(x_1,x_2) = \min \{f(x_1,x_2), g(x_1,x_2)\}$

a) Geben Sie zwei beliebige, aber konkrete verschiedene Elemente f und g aus $\mathscr{B}$ an, die beide nicht dem neutralen Element einer der beiden Operationen entsprechen! (2 BE)

b) Geben Sie das Ergebnis von $\sim(f \oplus g)(0,0)$ für die von Ihnen in a) gewählten Elemente an! (1 BE)

c) Wenden Sie auf b) die deMorgansche Regel an und beweisen Sie deren Gültigkeit, indem Sie die Zwischenwerte angeben! (2 BE)

5. Aufgabe (4 BE)

Beweisen Sie mit vollständiger Induktion: n! ist eine gerade Zahl für $n \geq 2$

6. Aufgabe (3 BE)

Finden Sie Belegungen für die Variablen $x,y \in \mathbb{N}$, die folgende Prädikate erfüllen:

a) $(x \mid y) \wedge (y \mid (x-y))$

b) $((x-y) \mid y) \wedge (y \mid x)$

c) $(x-1) \mid (x/2)$

7. Aufgabe (4 BE)

a) Bestimmen Sie den größten gemeinsamen Teiler von 204795 und 31365 mit Hilfe des Euklidischen Algorithmus. (3 BE)

b) Geben Sie auch das kleinste gemeinsame Vielfache an und zeigen Sie, wie Sie das berechnet haben. (1 BE)

8. Aufgabe (5 BE)

a) Geben Sie die Tabelle der Gruppe $(\mathbb{Z}^*_9, \odot_9)$ an. (4 BE)

b) Warum darf die Primzahl 3 nicht in $(\mathbb{Z}^*_9, \odot_9)$ enthalten sein? (1 BE)

9. Aufgabe (6 BE)

a) Geben Sie alle Elemente von GF(9) in Vektorschreibweise an und schreiben Sie zu jedem Element seine Ordnung bezüglich der Addition hinzu. (2 BE)

b) Multiplizieren Sie in GF (9) die Elemente (1,2) und (2,1). Transformieren Sie die Elemente dafür in Polynomschreibweise und benutzen Sie das irreduzible Polynom $x^2 + 1$. Geben Sie das Ergebnis dann wieder in Vektorschreibweise an. (4 BE)

10. Aufgabe (2 BE)

Welchen Koeffizienten hat der Term $a^2b^3c^3d^4$ in $(a+b+c+d)^{12}$? Es reicht aus, wenn Sie das Ergebnis als Formelterm angeben. Sie müssen ihn nicht ausrechnen.

11. Aufgabe (4 BE)

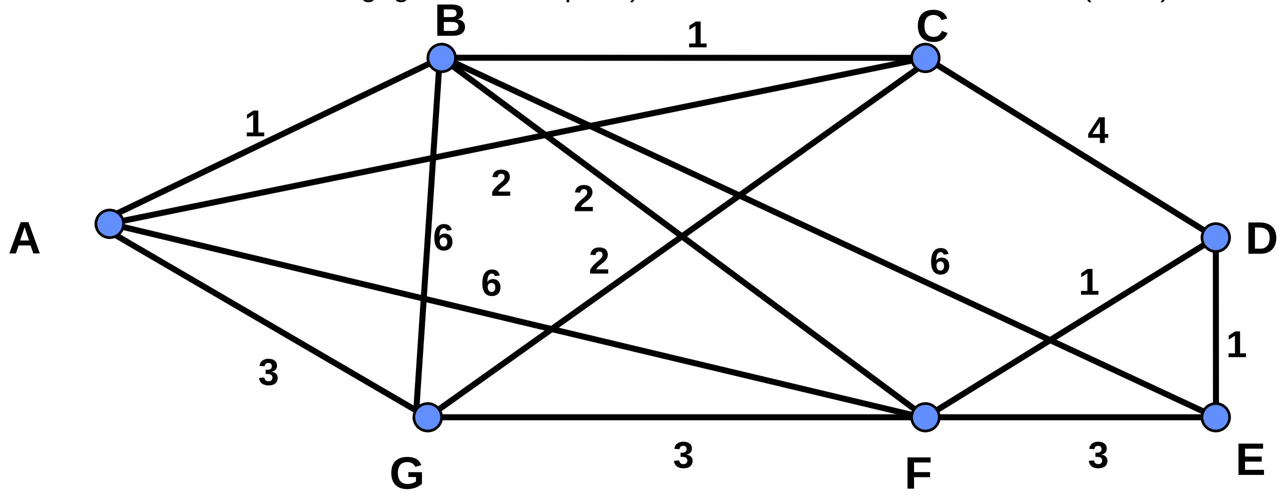
a) Ist die Permutation (1 3 5 4 2 6) gerade oder ungerade? Begründen Sie Ihre Antwort. (2 BE)

b) Geben Sie das Verknüpfungsergebnis von (1 3 5 4 2 6) ∘ (1 3 5 4 2 6) in Zyklenform an. (2 BE)

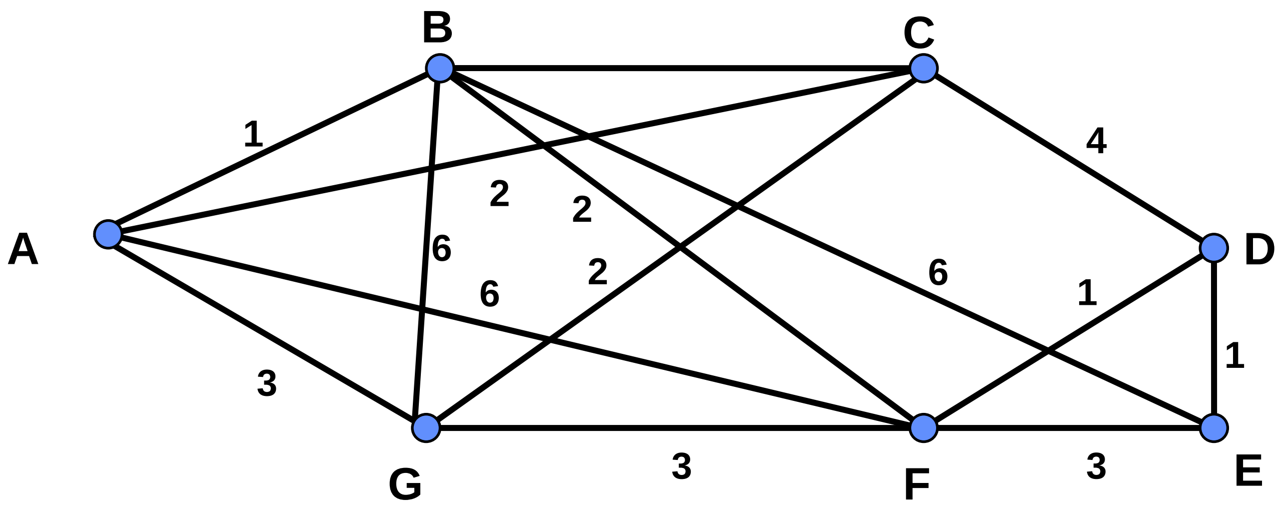
12. Aufgabe (10 BE)

Gegeben sei der unten angegebene Graph.

a) Geben Sie das Gerüst an, welches der Algorithmus von Kruskal berechnet (markieren Sie die Kanten im unten angegebenen Graphen) (2 BE)



b) Geben Sie das Gerüst aus kürzesten Wegen an, welches der Algorithmus von Dijkstra berechnet, wenn er den kürzesten Weg von A nach E berechnen soll (markieren Sie die Kanten im unten angegebenen Graphen) (2 BE)



c) Ist der Graph planar? Begründen Sie Ihre Antwort. (1 BE)

d) Hat der Graph einen Eulerkreis oder einen Eulerweg? Begründen Sie Ihre Antwort. (2 BE)

e) Hat der Graph einen Hamiltonkreis? Begründen Sie Ihre Antwort. (1 BE)

f) Kann man die Ecken des Graphen mit 4 Farben zulässig färben? Begründen Sie Ihre Antwort. Begründen Sie auch, warum es nicht mit weniger Farben geht. (2 BE)

13. Aufgabe (5 BE)

Gegeben Sei die Formel $(x \wedge y) \vee (x \rightarrow y)$.

a) Bringen Sie die Formel in KNF. Versuchen Sie, mit einer minimalen Anzahl von Klauseln auszukommen. (3 BE)

b) Beschreiben Sie die Formel in Mengendarstellung. (1 BE)

c) Ist die Formel erfüllbar oder widerlegbar? Begründen Sie beide Antworten! (1 BE)

14. Aufgabe (8 BE)

Gegeben seien die folgenden Prädikate mit den zugehörigen Bedeutungen:

L(x,y)	x liebt y.
K(x,y)	x ist ein Kind von y.
S (x)	x ist Student.
M (x)	x ist musikalisch.

Der Definitionsbereich für die Parameter ist die Menge aller Menschen.

Beschreiben Sie die folgenden Aussagen mit jeweils einem prädikatenlogischen Ausdruck, der *ausschließlich* die Prädikate L, K, S oder M verwendet.

a) Wenn Bernd musikalisch wäre, würde Anna ihn lieben. (2 BE)

b) Unter den Studenten liebt Anna liebt nur die musikalischen. (2 BE)

c) Alle Kinder von musikalischen Studenten sind musikalisch. (2 BE)

Beschreiben Sie für folgende Formel, was diese bedeutet:

d) $\forall x \, \forall y \, \exists z$: $S(x) \wedge K(y,x) \rightarrow M(y) \wedge L(y, z) \wedge S(z)$ (2 BE)

15. Aufgabe (6 BE)

a) Finden Sie zum folgenden Programmausschnitt und der gegebenen Nachbedingung ψ die schwächste Vorbedingung φ.
Vereinfachen Sie die Bedingungen so weit wie möglich (aber nicht noch weiter!)
Geben Sie alle Zwischenschritte Ihrer Beweiskette an!. (4 BE)

```
if y > x
     then
        begin


           x := x - y;


           y := x + y;
        end
      else
        begin


           y := x - y;


           x := x + y;
        end
 ψ: x = y
```

b) Geben Sie eine Belegung für x und y an, welche die gegebene Nachbedingung erfüllt und die then-Anweisung durchläuft und geben Sie eine Belegung an, welche die gegebene Nachbedingung erfüllt und die else-Anweisung durchläuft! (2 BE)

16. Aufgabe (8 BE)

Betrachten Sie folgenden Programmausschnitt:

```
n ∈ N \ {0}

  result := 0;
  index := n;

  while (index > 0) do
    begin
      index := index – 1;
      result := result + index
    end
```

a) Seien $\mathbf{result}_i$ und $\mathbf{index}_i$ die Werte der Variablen nach dem i-ten Schleifendurchlauf. Bestimmen Sie deren Werte durch eine nichtrekursive Formel (probieren Sie es an Beispielen aus!) und beweisen Sie die Formel durch vollständige Induktion über i.
<u>Hinweis:</u> Versuchen Sie nicht, die entstehende Summe durch eine Formel zusammenzufassen, denn das wird nur unübersichtlicher. Arbeiten Sie lieber mit Pünktchen! (6 BE)

b) Folgern Sie aus a), wann die Schleife abbricht und folgern Sie daraus, welche Werte für alle Variablen zum Schluss berechnet werden! (2 BE)

17. Aufgabe (3 BE)

Gegeben sei folgende Funktion **rekursiv**:

```
procedure rekursiv(m,n: integer): integer

begin
   if (n<=0)
      return 0
   else
      return m * rekursiv(m, n-1);
end;
```

Von welchem Typ ist die Rekursion? Geben Sie für jeden der 3 Typen eine Begründung ab, warum dieser gilt bzw. nicht gilt.