Fachhochschule Wedel
Prof. Dr. Sebastian Iwanowski

24.02.2014

DM lang

Aufgaben zur Klausur in

***Diskrete Mathematik* (WS 2013/2014)**

Studiengänge B_Inf, B_TInf, B_Minf, B_WInf, B_ECom

Zeit: 180 Minuten,

erlaubte Hilfsmittel: Taschenrechner

Bitte tragen Sie Ihre Antworten ausschließlich an den freien Stellen nach den jeweiligen Aufgaben ein (ggf. auf der Rückseite gegenüber weiterschreiben). Nicht zu wertende Teile sind durchzustreichen.

Diese Klausur besteht einschließlich dieses Deckblatts aus 11 Seiten. Die Aufgaben 1 bis 10 beziehen sich auf die Grundvorlesung und die Aufgaben 11 bis 15 auf die Anwendungsvorlesung.

Für die Klausur werden insgesamt 100 Bewertungseinheiten (BE) vergeben. Zum Bestehen benötigen Sie mindestens 50 BE.

Viel Erfolg !

1. Aufgabe (11 BE)

a) Geben Sie folgende Mengen in Elementschreibweise an: (4 BE)

$A = \{x \in \mathbb{Z} \mid \exists y \in \mathbb{Z}: x \cdot y = 5\} =$

$B = \{x \in \mathbb{N} \mid \exists y \in \mathbb{N}: x \cdot y = 5\} =$

$C = \{x \in \mathbb{N} \mid x \cdot 0 = 5\} =$

$D = \{x \in \mathbb{N} \mid x \cdot 5 = 5\} =$

b) Berechnen Sie folgende Mengen und stellen Sie das Ergebnis dar wie in a). (6 BE)

$A \cup C =$

$A \cap C =$

$A \setminus B =$

$B \setminus D =$

$(A \setminus B) \cup (B \setminus D) =$

$(A \setminus B) \setminus (B \setminus D) =$

c) Geben Sie ein Element an, das in der Potenzmenge jeder Menge aus b) enthalten ist. (1 BE)

2. Aufgabe (10 BE)

Gegeben sei die Menge M = {a, b, c, d, e}.

a) Konstruieren Sie eine totale Ordnungsrelation auf M, welche die Elemente (a,c) und (e,c) enthält, aber nicht die Elemente (a,b) und (d,e). Geben Sie die Relation in Elementschreibweise an, außerdem das Hasse-Diagramm, und bestimmen Sie die maximalen bzw. minimalen Elemente. (4 BE)

b) Konstruieren Sie eine Äquivalenzrelation auf M, welche die Elemente (a,c) und (e,c) enthält, aber nicht die Elemente (a,b), (b,d) und (d,e). Geben Sie die Relation in Elementschreibweise an, außerdem die Äquivalenzklassen. (3 BE)

c) Konstruieren Sie eine surjektive Funktion $M \rightarrow M$, welche die Elemente (a,c) und (e,b) enthält, aber nicht die Elemente (b,a), (d,e) und (b,e). Geben Sie die Funktion als Relation in Elementschreibweise an. Geben Sie an, ob Ihre Funktion auch injektiv ist und begründen Sie Ihre Antwort. (3 BE)

3. Aufgabe (4 BE)

Betrachten Sie die Teiler-Algebra für n = 66:

a) Geben Sie alle Elemente explizit an. Welche Operationen entsprechen dem +, * und ~ der Booleschen Algebren? (2 BE)

b) Wählen Sie 2 Elemente aus und zeigen Sie für diese 2 Elemente, dass die deMorgansche Regel gilt (es reicht aus, eine der beiden Regeln zu zeigen). (2 BE)

4. Aufgabe (3 BE)

Testen Sie durch Probedivisionen, ob die folgenden Zahlen Primzahlen sind. Geben Sie bei Primzahlen an, bis zu welcher Zahl Sie die Probedivision durchgeführt haben, und geben Sie bei Nichtprimzahlen mindestens einen nichttrivialen Teiler an.

a) 2009

b) 2017

c) 10 000 001

5. Aufgabe (4 BE)

Bestimmen Sie den **ggT** und das **kgV** von 1 111 111 und 125 523 mit Hilfe des Euklidischen Algorithmus. Geben Sie die Zwischenschritte an.

6. Aufgabe (5 BE)

a) Geben Sie alle Elemente der Menge $(\mathbb{Z}_2)^3$ an. (1,5 BE)

b) Geben Sie alle Elemente der Menge $(\mathbb{Z}_{15})^*$ an. (1,5 BE)

c) Sind die beiden Gruppen $((\mathbb{Z}_2)^3,+)$ und $((\mathbb{Z}_{15})^*,*)$isomorph? Begründen Sie Ihre Antwort, indem Sie entweder den Isomorphismus angeben oder einen Grund nennen, warum es keinen geben kann (2 BE)

7. Aufgabe (6 BE)

a) Geben Sie alle Elemente von GF(8) in Vektorschreibweise an. (1 BE)

b) Multiplizieren Sie in GF (8) die Elemente (1,0,1) und (1,1,1). Benutzen Sie dafür das irreduzible Polynom $x^3 + x + 1$. (4 BE)

c) Können Sie zu jedem Vielfachem x von 8 einen Körper mit x Elementen bilden? Begründen Sie Ihre Antwort. (1 BE)

8. Aufgabe (3 BE)

Bestimmen Sie die Anzahl der durch 5 oder 9 teilbaren Zahlen kleiner gleich 1000 mit Hilfe der Siebformel.

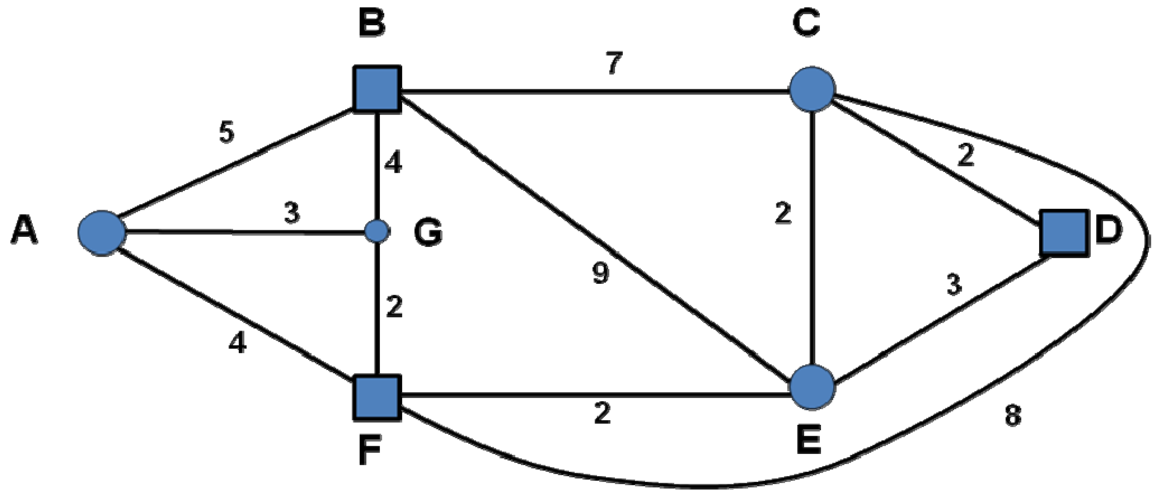
9. Aufgabe (5 BE)

Betrachten Sie die Gruppe $(S_{3,}\circ)$ aller Permutationen der Zahlen 1,2,3:

a) Geben Sie alle geraden Permutationen in Zyklendarstellung an und beweisen Sie deren Eigenschaft, gerade zu sein, indem Sie von jeder Permutation eine Zerlegung in Transpositionen angeben. (2 BE)

b) Verknüpfen Sie zwei gerade Permutationen (ungleich der Identitätsabbildung) und zeigen Sie, dass das Ergebnis tatsächlich wieder gerade ist. (1 BE)

c) Zeigen Sie an einem Beispiel, dass die Verknüpfung $\circ$ in S_3 nicht kommutativ ist. (2 BE)
Tipp: Mit 2 geraden Permutationen schaffen Sie es hier nicht!



10. Aufgabe (11 BE)

Gegeben sei der oben angegebene Graph.

a) Geben Sie die Reihenfolge der Knoten an, die der Algorithmus von Dijkstra bei der Berechnung des kürzesten Weges von A nach D als endgültig untersuchte Knoten in die Menge `Berechnet` schiebt. Geben Sie außerdem für jeden dieser Knoten (inklusive A und D) an, welche minimale Zahl der Algorithmus als Grundlage für seine Entscheidung ausgerechnet hat, wenn der Knoten in `Berechnet` geschoben wird (als Index hier an den Buchstaben). (3 BE)

b) Geben Sie das Gerüst an, welches der Algorithmus von Kruskal berechnet (markieren Sie die Kanten im angegebenen Graphen). Berechnen Sie die Gesamtlänge und erwähnen Sie hier, was diese Länge im Vergleich zu anderen Gerüsten auszeichnet. (2 BE)

c) Geben Sie das Gerüst an, welches der Algorithmus von Dijkstra berechnet (markieren Sie die Kanten im angegebenen Graphen auf andere Weise als in b)). Berechnen Sie die Gesamtlänge und erwähnen Sie hier, wie diese Länge im Vergleich zu anderen Gerüsten auszeichnet. (2 BE)

d) Geben Sie die Ecken-Färbungszahl des Graphen an und begründen Sie Ihre Antwort (2 Begründungen: Warum ist die Zahl nicht größer und warum nicht kleiner). (2 BE)

e) Fügen Sie im angegebenen Graphen eine zusätzliche Kante zwischen zwei vorhandene Ecken hinzu, sodass der Graph nicht mehr planar ist. Begründen Sie mit einem graphentheoretischen Satz, warum er dann nicht mehr planar ist. Zeichnen Sie aus Übersichtsgründen die Kante oben nicht ein, sondern nennen Sie die hier. (2 BE)

Tipp: Achten Sie auf die unterschiedlich gekennzeichneten Ecken in der Skizze oben!

11. Aufgabe (4 BE)

Gegeben sei die Formel F: $((b \to a) \wedge (a \to b)) \vee b$

a) Bringen Sie F in eine konjunktive Normalform mit möglichst wenigen Klauseln! (3 BE)

b) Bringen Sie die konjunkive Normalform von F in Mengendarstellung. (1 BE)

12. Aufgabe (12 BE)

Gegeben seien die folgenden Prädikate mit den zugehörigen Bedeutungen:

B(x,y)	Studierende(r) x hat die Prüfung im Fach y bestanden.
T(x,y)	Studierende(r) x hat an der Prüfung im Fach y teilgenommen.
P(y)	y ist ein praktisches Fach
Th(y)	y ist ein theoretisches Fach

Außerdem beschreibe die Menge S alle Studierenden und die Menge F alle Fächer.

a) Schreiben Sie die Definitionsbereiche aller Prädikate jeweils an das Ende der Zeile oben. (1 BE)

Beschreiben Sie die folgenden Aussagen mit jeweils einem prädikatenlogischen Ausdruck, der *ausschließlich* die Prädikate B, T, P oder Th verwendet! Hierbei seien Alex und Linda Studierende aus S, und Ana, DM und PS1 Fächer aus F.

b) Ana und DM sind theoretische Fächer, während PS1 ein praktisches Fach ist. (1 BE)

c) Alex hat an Ana und DM teilgenommen, aber davon nur DM bestanden. (2 BE)

d) Linda hat sich in jedem Fach prüfen lassen. (2 BE)

e) Linda hat alle theoretischen Fächer bestanden. (2 BE)

f) Die einzige praktische Prüfung, die Alex bestanden hat, ist PS1. (2 BE)

g) Alle Studierenden, die ein Fach bestanden haben, haben auch an der Prüfung in diesem Fach teilgenommen. (2 BE)

13. Aufgabe (7 BE)

a) Finden Sie zum folgenden Programmausschnitt und der gegebenen Nachbedingung die schwächste Vorbedingung!
Vereinfachen Sie die Bedingungen so weit wie möglich (aber nicht noch weiter!)
Geben Sie alle Zwischenschritte Ihrer Beweiskette an! (5 BE)

b) Geben Sie eine Belegung für x und y an, welche die gegebene Nachbedingung erfüllt und die then-Anweisung durchläuft und geben Sie eine Belegung an, welche die gegebene Nachbedingung erfüllt und die else-Anweisung durchläuft! (2 BE)

```
if x > y
   then
      begin



         x := y - x;



         y := y - x
      end
   else
      begin



         y := x - y;



         x := x - y
      end
Nachbedingung ⇔ x > y
```

14. Aufgabe (8 BE)

Gegeben sei die folgende Funktion f:

```
procedure f (n: integer): integer
begin
  result := 1;
  k := 1;
  while (k < n) do
    begin
      result := result + result;
      k := k+1;
    end;
  return result;
end {f}
```

a) Seien $\mathbf{result}_i$ und $\mathbf{k}_i$ die Werte der Variablen nach dem i-ten Schleifendurchlauf. Bestimmen Sie diese Werte durch eine nichtrekursive Formel und beweisen Sie diese durch vollständige Induktion über i. (5 BE)

b) Folgern Sie aus a), wann die Schleife abbricht und folgern Sie daraus, welche Werte für alle Variablen zum Schluss berechnet werden (also nicht nur der Rückgabewert von f). Geben Sie gegebenenfalls eine Vorbedingung an, die für Ihre Lösung gelten muss! (3 BE)

15. Aufgabe (7 BE)

Gegeben sei folgende Funktion f:

```
procedure f(x: ℕ): ℕ;
begin
 if (x MOD 2 = 1) v (x = 0)
    then return x
    else return x/2 + f(x DIV 2)
end
```

a) Von welchem Typ ist die Rekursion (primitiv rekursiv, endrekursiv, linear rekursiv, nichts davon)? Begründen Sie Ihre Antwort und geben Sie an, warum die anderen Typen nicht gelten. (3BE)

b) Was berechnet die Funktion in Abhängigkeit von x?

Beweisen Sie Ihre Aussage durch vollständige Induktion. (4BE)