

**Aufgaben zur Klausur in**  
***Diskrete Mathematik (Grund- und Anwendungsvorlesung) (SS 2013)***  
**Studiengänge B\_Inf, B\_TInf, B\_Minf, B\_WInf, B\_ECom (ab 01.10.2011)**

Zeit: 180 Minuten,  
erlaubte Hilfsmittel: Taschenrechner

Bitte tragen Sie Ihre Antworten und eindeutig gekennzeichneten Lösungen ausschließlich an den freien Stellen nach den jeweiligen Aufgaben ein (ggf. auf der freien Seite gegenüber weiterschreiben). Nebenrechnungen können ebenfalls auf der freien Seite gegenüber durchgeführt werden. Falls sie nicht gewertet werden sollen, bitte durchstreichen!

Diese Klausur besteht einschließlich dieses Deckblatts aus 11 Seiten. Die Aufgaben 1 bis 10 beziehen sich auf die Grundvorlesung und die Aufgaben 11 bis 15 auf die Anwendungsvorlesung.

Für die Klausur werden insgesamt 100 Bewertungseinheiten (BE) vergeben. Zum Bestehen benötigen Sie mindestens 50 BE.

Viel Erfolg !

## 1. Aufgabe (9 BE):

Gegeben sei als Grundmenge  $\Omega$  die Menge  $\{A,B,C,D,E,F,G,H,I,J,K,L,M,N\}$  und die folgenden 4 Mengen:

$$M_1 = \{A,N,N,A\} \quad M_2 = \{N,A,B,E,L\} \quad M_3 = \{K,A,B,E,L\} \quad M_4 = \{J,A,G,D\}$$

Bilden Sie die folgenden 5 Mengen (Aufgabe a) – e))<sup>1</sup>:

a)  $M_2 \setminus M_1 =$

b)  $M_1 \setminus M_2 =$

c)  $M_1 \cap M_3 =$

d)  $M_2 \Delta M_3 =$

e)  $\sim(M_1 \cup M_2 \cup M_3 \cup M_4) =$

f) Wenden Sie auf die vorige Aufgabenstellung die deMorgansche Regel an: Geben Sie einen Term aus den Mengen  $M_1, M_2, M_3, M_4$  an!

g) Zu einer beliebigen Mengenfamilie  $\mathcal{M} = \{A: A \text{ ist eine Menge}\}$  sei die Relation  $R$  mit dem Symbol  $\preceq$  folgendermaßen definiert:  $A \preceq B$  genau dann, wenn  $|A| \leq |B|$ . Geben Sie für  $\mathcal{M} = \{M_1, M_2, M_3, M_4\}$  alle Elemente an, die zu  $R$  gehören (in Mengenschreibweise), also:  $R = \{ \dots \}$ :<sup>2</sup>

h) Ist  $R$  eine Ordnungsrelation? Begründen Sie Ihre Antwort!

---

<sup>1</sup>Hierbei steht  $\sim$  für das Komplement (bzgl.  $\Omega$ ) und  $\Delta$  für die symmetrische Differenz.

<sup>2</sup>Geben Sie jede darzustellende Menge durch die Angabe ihres Symbols an, nicht durch die Aufzählung ihrer Elemente, also z.B.  $M_1$  statt  $\{A,N,N,A\}$



#### 4. Aufgabe (6 BE)

Beweisen Sie mit vollständiger Induktion, dass  $F(n) = 1 + F(1) + \dots + F(n-2)$  für die Fibonaccizahlen  $F(n)$  und  $n \geq 2$  ist. Geben Sie dafür erst einmal die ersten 5 Fibonaccizahlen an.

#### 5. Aufgabe (4 BE)

Bestimmen Sie den ggT und das kgV von 28520 und 70587 mit Hilfe des Euklidischen Algorithmus! Geben Sie die Zwischenschritte an!

#### 6. Aufgabe (6 BE)

Finden Sie zu den folgenden Elementen das additiv und multiplikativ Inverse, falls es existiert. Begründen Sie, warum es sich um das Inverse handelt bzw. warum es kein Inverses geben kann:

a)  $5$  in  $\mathbb{Z}_{75}$

b)  $10$  in  $\mathbb{Z}_{11}$

c)  $4$  in  $\mathbb{Z}_9$

## 7. Aufgabe (5 BE)

Hubert Naseweis gefällt die komplizierte Methode seines Professors zur Konstruktion endlicher Körper nicht. Er meint, das ginge einfacher und liefert für 4 Elemente das Beispiel:

+	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

•	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	3	1
3	0	3	1	2

- a) 2 Gruppen scheint Hubert ja konstruiert zu haben: Schreiben Sie in beiden Tabellen auf der linken Seite die Ordnungszahl des jeweiligen Elements. Falls ein Element gar nicht zur Gruppe dazugehört, schreiben Sie ein „-“.
- b) Begründen Sie, warum Hubert keinen Körper konstruiert hat, indem Sie  $(2+2) \cdot 3$  berechnen und ein geeignetes Gesetz anwenden.
- c) Welche Operationstafel muss Hubert verändern, um doch noch einen Körper zu erhalten? (Angabe der Lösung nicht erforderlich)

## 8. Aufgabe (5 BE)

- a) Geben Sie alle Elemente von  $GF(4)$  in Vektorschreibweise an.
- b) Multiplizieren Sie in  $GF(4)$  die Elemente  $(1,0)$  und  $(1,1)$ . Transformieren Sie diese dafür in Polynomschreibweise und benutzen Sie das irreduzible Polynom  $x^2 + x + 1$ . Geben Sie das Ergebnis dann wieder in Vektorschreibweise an!

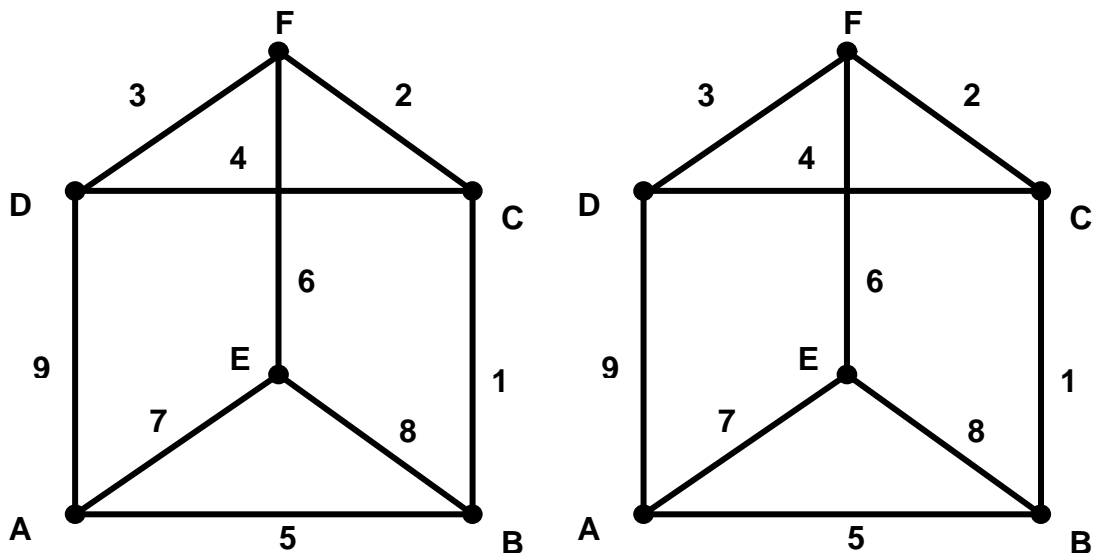
## 9. Aufgabe (7 BE)

- a) Ist es besser, zwei 3-stellige Zahlenschlösser oder ein 6-stelliges zu benutzen? Begründen Sie Ihre Antwort und geben Sie auch die Anzahl der Möglichkeiten an!
- b) Gegeben Sei die Permutation  $(10\ 4\ 3)\ (2\ 5\ 1\ 6)\ (14\ 7\ 12)\ (11\ 8\ 13\ 9)$ . Ist diese Permutation gerade oder ungerade? Begründen Sie Ihre Antwort!
- c) Verknüpfen Sie die Permutation aus b) mit sich selbst und geben Sie die Antwort an!

## 10. Aufgabe (9 BE)

Gegeben sei der untenstehende Graph mit den angegebenen Kantenlängen.

- a) Zeichnen Sie links einen minimal spannenden Baum ein!
- b) Zeichnen Sie rechts alle Wege ein, die berechnet und als kürzeste Wege erkannt werden, wenn der kürzeste Weg von A nach F mit dem Algorithmus von Dijkstra berechnet wird: Markieren Sie die entsprechenden Knoten!



c) Gibt es einen Eulerweg? Begründen Sie Ihre Antwort!

d) Ist der Graph planar? Begründen Sie Ihre Antwort!

e) Geben Sie die (Ecken-)Färbungszahl des Graphen an und begründen Sie Ihre Antwort!

## 11. Aufgabe (4 BE)

Gegeben Sei die Formel  $\neg((p \rightarrow q) \wedge r)$ .

a) Bringen Sie die Formel in KNF. Versuchen Sie, mit einer minimalen Anzahl von Klauseln auszukommen!

b) Beschreiben Sie die Formel in Mengendarstellung!

## 12. Aufgabe (10 BE)

Sei  $M$  die Menge aller Menschen. Gegeben seien die folgenden Funktionen mit den zugehörigen Bedeutungen:

K:  $M \times M \rightarrow \{\perp, \top\}$   $K(x,y) = \top$  genau dann wenn  $x$  ein Kind von  $y$  ist.

F:  $M \rightarrow \{\perp, \top\}$   $F(x) = \top$  genau dann wenn  $x$  weiblich ist. (Gegenteil:  $x$  ist männlich)

A:  $M \rightarrow \mathbb{N}$   $A(x)$  gibt das Alter von  $x$  in Jahren an.

L:  $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \{\perp, \top\}$   $L(x,y) = \top$  genau dann wenn  $x$  kleiner als  $y$  ist.

a) Geben Sie an, welche der Funktionen Prädikate sind (mit Begründung)

Beschreiben Sie die folgenden 4 Aussagen mit jeweils einem prädikatenlogischen Ausdruck, der *ausschließlich* die oben genannten Funktionen verwendet! Sie dürfen ferner beliebige Variablen sowie konstante Werte (für Menschen und Zahlen) benutzen.

b) Anna ist die ältere Schwester von Bernd.

c) Jede Tochter von Emma ist unter 18 Jahre alt.

d) Emma hat einen Sohn, der über 18 Jahre alt ist.

e) Anna und Bernd sind Kinder von Emma.

f) Setzen Sie voraus, dass alle vorigen Aussagen wahr sind und dass Bernd männlich ist. Ist Bernd über 18? Begründen Sie Ihre Antwort!



### 13. Aufgabe (10 BE)

- a) Finden Sie zu folgendem Programmausschnitt und der gegebenen Nachbedingung die schwächste Vorbedingung und vereinfachen Sie diese so weit wie möglich.

Geben Sie alle Zwischenschritte Ihrer Beweiskette an!

$V \Leftrightarrow$

```
x := y * y;
```

```
if x ≤ y
```

```
  then
```

```
    x := x * y
```

```
  else
```

```
    y := x * y
```

$N \Leftrightarrow x = y$

- b) Geben Sie eine Belegung für x und y an, welche die gegebene Nachbedingung erfüllt und die then-Anweisung durchläuft und geben Sie eine Belegung an, welche die gegebene Nachbedingung erfüllt und die else-Anweisung durchläuft. Falls eine Anforderung nicht erfüllbar ist, geben Sie das an.

## 14. Aufgabe (8 BE)

Betrachten Sie folgenden Programmausschnitt:

$V \Leftrightarrow n, f, k \in \mathbb{N}$

```
f := 1;
k := n;
while(k > 0) do
  begin
    k := k - 1;
    f := f + f;
  end
```

$N \Leftrightarrow ?$

a) Formulieren Sie die Invariantenbedingungen für die Schleifenvariablen, die für jeden Schleifendurchlauf gültig sind. Beweisen Sie diese durch vollständige Induktion.

b) Zeigen Sie, dass dann die Schleife irgendwann terminiert (wann genau?). Formulieren und beweisen Sie direkt unter Verwendung von a), was diese dann berechnet hat.

## 15. Aufgabe (6 BE)

Gegeben sei folgende Funktion  $f$ :

```
1  procedure f(m,n: integer): integer
2  begin
3      if (m <= 1)
4          return 0
5      else
6          return f(m-1, n-1);
7  end;
```

a) Von welchem Typ ist die Rekursion? Begründen Sie Ihre Antwort!

b) Was berechnet die Funktion in Abhängigkeit von  $m$  und  $n$ ?

Beweisen Sie Ihre Aussage durch vollständige Induktion (welcher Parameter?).