Aufgaben zur Klausur in

***Diskrete Mathematik* (WS 2012/2013)**

Studiengänge B_Inf, B_TInf, B_Minf, B_WInf, B_ECom

Zeit: 180 Minuten,

erlaubte Hilfsmittel: Taschenrechner

Bitte tragen Sie Ihre Antworten und fertigen Lösungen ausschließlich an den freien Stellen nach den jeweiligen Aufgaben ein (ggf. auf der jeweiligen Rückseite weiterschreiben).

Diese Klausur besteht einschließlich dieses Deckblatts aus 11 Seiten. Die Aufgaben 1 bis 9 beziehen sich auf die Grundvorlesung und die Aufgaben 10 bis 14 auf die Anwendungsvorlesung.

Für die Klausur werden insgesamt 80 Bewertungseinheiten (BE) vergeben. Zum Bestehen benötigen Sie mindestens 40 BE.

Viel Erfolg !

1. Aufgabe (8 BE)

Gegeben seien die Mengen A = {a, b, c}, B = { (a,b), c}, C = { {a,b}, c }, D = { (a,b,c) }.

Aus diesen Mengen sei die Menge M = {A, B, C, D} gebildet.

Die Relation R auf M ist folgendermaßen definiert: Ein Element steht zu einem anderen Element in Relation, wenn die beiden Elemente eine nichtleere Schnittmenge haben.

a) Geben Sie die Vereinigungsmenge aus den Mengen A, B, C. D in Elementdarstellung an (mit Symbolen a,b,c) und nennen Sie die Gesamtanzahl der Elemente. (2 BE)

b) Geben Sie Relation R als Menge in Elementdarstellung an (mit Symbolen A,B,C,D)! (2 BE)

c) Untersuchen Sie, ob R eine Äquivalenzrelation oder eine Ordnungsrelation ist und begründen Sie Ihre Antwort zu beiden Sachverhalten. (2 BE)

d) Je nach Ausgang der Antwort in a) (nur eines von beiden ist möglich): (2 BE)

   i) Erstellen Sie ein Hassediagramm und kennzeichnen Sie die maximalen und minimalen Elemente.

   ii) Geben Sie die Äquivalenzklassen an.

2. Aufgabe (3 BE)

Gegeben seien die Mengen A = {1, 2}, B = {a, b, c}, C = {12, 21}

a) Geben Sie Funktionen f: A → B sowie g: B → C an, sodass f nicht surjektiv und g nicht injektiv ist, aber die Komposition g ∘ f bijektiv. (2 BE)

b) Können Sie Aufgabe a) auch lösen, wenn f und g beide bijektiv sein sollen? Begründen Sie Ihre Antwort! (1 BE)

3. Aufgabe (4 BE)

Gegeben sei die Boolesche Algebra $\mathscr{B} = \{m \in \mathbb{N}: m \text{ teilt } 15\}$ mit den Operationen i), ii), iii):

i) $\sim p = 15 / p$ ii) $p \oplus q = \text{ggT}(p,q)$ iii) $p \odot q = \text{kgV}(p,q)$

a) Geben Sie alle Elemente von $\mathscr{B}$ explizit an und benennen Sie das Nullelement und das Einselement! (2 BE)

b) Führen Sie die Gültigkeit eines der deMorganschen Gesetze für die Elemente 3 und 15 vor: Geben Sie die Zwischenergebnisse an! (2 BE)

4. Aufgabe (4 BE)

Gegeben sei folgende Produktionsregel zur Bildung von Wörtern:

$$\vec{x} \in Varname \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{x} = \alpha\beta & \text{für} \quad \alpha, \beta \in \{a, b, c, ..., z\} \\ \vec{x} = \alpha\beta\,\vec{y} & \text{für} \quad \vec{y} \in Varname \quad \text{und} \quad \alpha, \beta \in \{a, b, c, ..., z\} \end{cases}$$

Beweisen Sie folgende Behauptung mit vollständiger Induktion über die Wortlänge:

Die Anzahl |x| der Buchstaben eines Wortes x ist immer eine gerade Zahl.

<u>Hinweis:</u> Sie dürfen den Induktionsschritt auch mit Worten begründen.

5. Aufgabe (3 BE)

Bestimmen Sie den ggT und das kgV von 169983 und 63529 mit Hilfe des Euklidischen Algorithmus! Geben Sie die Zwischenschritte an!

6. Aufgabe (4 BE)

Betrachten Sie die Gruppen $(\mathbb{Z}_4,+)$, $(\mathbb{Z}^*_8,*)$ und $(\mathbb{Z}^*_{10},*)$:

a) Geben Sie für jede Gruppe die Elemente explizit an! (2 BE)

b) Geben Sie eine Isomorphismus-Abbildung zwischen zwei dieser Gruppen an (finden Sie dazu zunächst heraus, welche 2 dieser Gruppen isomorph sind) (2 BE)

7. Aufgabe (6 BE)

a) Berechnen Sie das Polynom $(3x^4 + 4x^3 + 2x)$ modulo $(x^3 + x + 4)$ in $\mathbb{Z}_7[x]$. (3 BE)

b) Für welchen Körper ist diese Berechnung relevant? (1 BE)

c) Welche Bedingung muss erfüllt sein, damit Sie diese Rechnung hier zur Erstellung einer Multiplikationstabelle verwenden können? Ist diese Bedingung hier erfüllt? Begründen Sie Ihre Antwort! (2 BE)

8. Aufgabe (4 BE)

Bestimmen Sie die Anzahl der durch 3 oder 4 teilbaren natürlichen Zahlen kleiner als 100 mit Hilfe der Siebformel.

9. Aufgabe (10 BE)

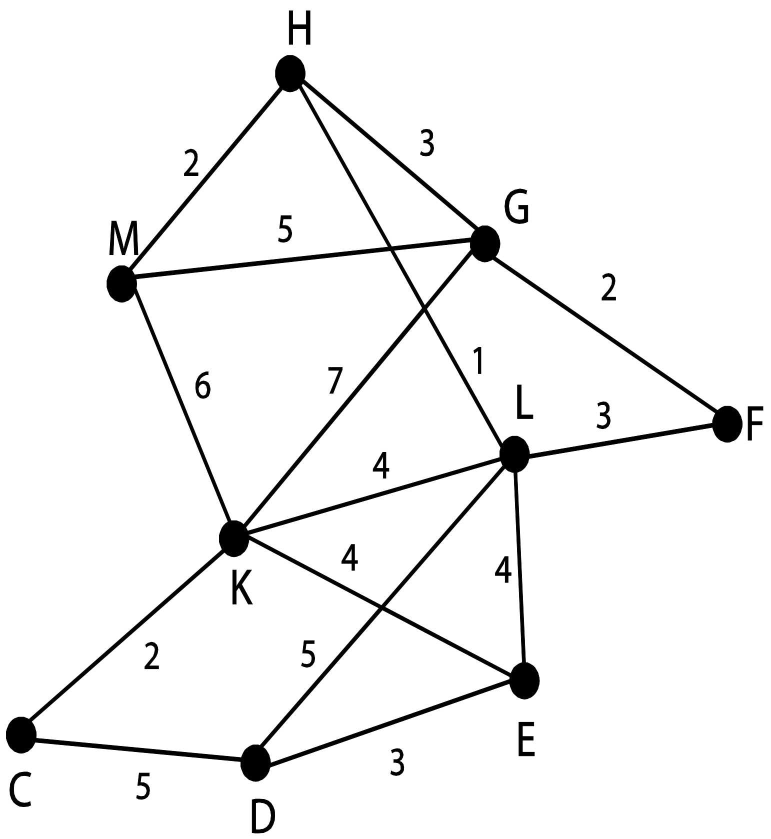
Gegeben sei der unten angegebene Graph.

a) Zeichnen Sie unten das Gerüst ein, welches der Algorithmus von Dijkstra berechnet, wenn der kürzeste Weg von K nach M gesucht wird. Schreiben Sie neben jeden Knoten die Markierung, welche der Algorithmus bis zum Abbruch ausgerechnet hat. Geben Sie im Folgenden an, welche Eigenschaften das berechnete Gerüst hat: (3 BE)

b) Zeichnen Sie unten mit einer anderen Schraffierung oder Farbe das Gerüst ein, welches der Algorithmus von Kruskal berechnet und geben Sie im Folgenden an, welche Eigenschaften dieses Gerüst hat: (2 BE)

c) Ist der Graph planar? Falls ja, begründen Sie das und geben Sie eine zulässige minimale Färbung seiner Länder an. Falls nein, begründen Sie das und geben Sie eine zulässige Färbung seiner Knoten an. (3 BE)
Hinweis: Um keine Verwechslung mit Aufgaben a) und b) zu bekommen, benennen Sie die Farben mit kleinen Buchstaben (a,b,c,…).

d) Gibt es einen Eulerweg? (nicht Kreis!) Falls ja, zeichnen Sie ihn ein, falls nein, begründen Sie, warum es keinen gibt. (2 BE)



10. Aufgabe (5 BE)

Gegeben sei die Formel F: $\neg(p \rightarrow (q \wedge r))$

a) Bringen Sie F in eine konjunktive Normalform mit möglichst wenigen Klauseln! (3 BE)

b) Von welchem Typ ist F?

Zur Auswahl stehen die 3 Kategorien Tautologie, erfüllbar und widerlegbar, Widerspruch. Begründen Sie Ihre Antwort! (2 BE)

11. Aufgabe (9 BE)

Gegeben seien die folgenden Prädikate auf der Menge aller Menschen:

K (x,y): x kennt y   S(x): x studiert   A(x): x arbeitet

a) Drücken Sie die folgenden Sachverhalte ausschließlich durch eine prädikatenlogische Verknüpfung dieser drei Prädikate aus!

i) Hugo studiert. (1 BE)

ii) Nicht jeder Arbeitende studiert. (2 BE)

iii) Jeder Studierende kennt jemanden, der arbeitet. (2 BE)

iv) Hugo kennt nur sich selbst. (2 BE)

b) Wenn alle Aussagen von a) wahr sind, können Sie dann eindeutig eine Aussage machen, ob Hugo arbeitet oder nicht? Begründen Sie Ihre Antwort! (2 BE)

12. Aufgabe (6 BE)

a) Finden Sie zum folgenden Programmausschnitt und der gegebenen Nachbedingung die schwächste Vorbedingung!
Vereinfachen Sie die Bedingungen so weit wie möglich (aber nicht noch weiter!)
Geben Sie alle Zwischenschritte Ihrer Beweiskette an! (5 BE)

```
if x > y
   then
      begin


         y := x - y;


         x := x – y;
      end
   else
      begin


         x := x - y;


         y := x – y;
      end
{x > y}
```

b) Geben Sie eine Belegung für x und y an, welche die gegebene Nachbedingung erfüllt und die then-Anweisung durchläuft und geben Sie eine Belegung an, welche die gegebene Nachbedingung erfüllt und die else-Anweisung durchläuft! (1 BE)

13. Aufgabe (7 BE)

Gegeben sei die folgende Funktion f:

```
procedure f (x: integer, y: integer): integer
begin
  m := x;
  n := y;
  while (m > 0) do
    begin
      n := n + 1;
      m := m - 1;
    end;
  return n;
end {f}
```

a) Seien n_i und m_i die Werte der Variablen nach dem i-ten Schleifendurchlauf. Bestimmen Sie diese Werte durch eine nichtrekursive Formel (abhängig von i und den Parametern x und y) und beweisen Sie diese durch vollständige Induktion über i. (4 BE)

b) Folgern Sie aus a), wann die Schleife abbricht und folgern Sie daraus, welchen Wert f letztendlich in Abhängigkeit von n_0 und m_0 berechnet. Geben Sie gegebenenfalls eine Vorbedingung an, die für Ihre Aussage gelten muss! (3 BE)

14. Aufgabe (7 BE)

Gegeben sei folgende Funktion f:

```
procedure f (x: integer, y: integer): integer
begin
  if (0 ≥ x)
    then return y
    else return f (x-1, y+1);
end {f}
```

a) Wandeln Sie diese Funktion in eine äquivalente Schleife um!

Aufgrund welcher Eigenschaft dieses Programms ist das leicht möglich? (3 BE)

b) Was berechnet f (x,y) in Abhängigkeit von x, y?

Beweisen Sie Ihre Aussage durch vollständige Induktion nach einem der Parameter. (4BE)