Fachhochschule Wedel 05.09.2012

Prof. Dr. Sebastian Iwanowski

DM lang

Aufgaben zur Klausur in

***Diskrete Mathematik (Grund- und Anwendungsvorlesung)* (SS 2012)**

Studiengänge B_Inf, B_TInf, B_Minf, B_WInf, B_ECom (ab 01.10.2011)

Zeit: 180 Minuten,

erlaubte Hilfsmittel: keine

Bitte tragen Sie Ihre Antworten und eindeutig gekennzeichneten Lösungen ausschließlich an den freien Stellen nach den jeweiligen Aufgaben ein (ggf. auf der freien Seite gegenüber weiterschreiben). Nebenrechnungen können ebenfalls auf der freien Seite gegenüber durchgeführt werden. Falls sie nicht gewertet werden sollen, bitte durchstreichen!

Diese Klausur besteht einschließlich dieses Deckblatts aus 12 Seiten. Die Aufgaben 1 bis 9 beziehen sich auf die Grundvorlesung und die Aufgaben 10 bis 14 auf die Anwendungsvorlesung.

Für die Klausur werden insgesamt 100 Bewertungseinheiten (BE) vergeben. Zum Bestehen benötigen Sie mindestens 50 BE.

Viel Erfolg !

1. Aufgabe (12 BE)

a) Geben Sie die folgenden Mengen in Elementschreibweise an: (4 BE)

$A = \{x \in \mathbb{Z} \mid \exists y \in \{1, 2, 3\}: x + y = 1\} =$

$B = \{x \in \mathbb{Z} \mid \exists y \in \{1, 2, 3\}: x + y = -1\} =$

$C = \{x \in \mathbb{Z} \mid \exists y \in \{1, 2, 3\}: (x + y)^2 = 1\} =$

$D = \{x \in \mathbb{Z} \mid \exists y \in \{1, 2, 3\}: (x + y)^2 = -1\} =$

b) Geben Sie von den folgenden Ausdrücken entweder die Ergebnismenge an oder den Wahrheitswert (ja nach Operator). Als Grundlage müssen Sie Ihr Ergebnis von a) verwenden (egal, ob es richtig oder falsch ist). (8 BE)

$A \cup B =$

$A \subset B =$

$A \cap B =$

$D \in A =$

$D \subset B =$

$B \setminus D =$

$(A \cup B) \setminus (B \setminus D) =$

$(A \cup B) \subset (B \setminus D) =$

2. Aufgabe (10 BE)

Folgende Personen werden betrachtet: (mit Bedeutung Namenskürzel, Geschlecht, Alter)

Anton (A,m,20), Berta (B,w,18), Claudia (C,w,21), Dieter (D,m,18), Erna (E,w,20) und Fritz (F,m,20).

a) Geben Sie die kleinstmögliche Grundmenge an, von der die eben genannten Tripel Elemente sind. (2 BE)

b) Betrachten Sie die Funktion f, welche jedem Namenskürzel das zugehörige Alter zuweist. Geben Sie einen Definitionsbereich und eine Zielmenge für diese Funktion an! Entscheiden Sie dann, ob f surjektiv oder injektiv ist, und begründen Sie Ihre Antwort. (3 BE)

c) Schreiben Sie die Funktion f explizit als endliche Menge in Elementdarstellung auf! (2 BE)

d) Ordnen Sie die oben angegebenen Menschen folgendermaßen: Ein Mensch x ist kleiner gleich dem Menschen y, wenn x jünger als y ist, oder wenn x identisch mit y ist. Zeichnen Sie das Hasse-Diagramm für die sich daraus ergebende Ordnungsrelation und kennzeichnen Sie die minimalen und maximalen Elemente. (3 BE)

3. Aufgabe (5 BE)

Betrachten Sie die Menge der Booleschen Schaltfunktionen für n = 2:

$\mathscr{B} = \{f:\{0,1\}^2 \rightarrow \{0,1\}\}$ mit den Operationen i), ii), iii):

i) $\sim f(x_1,x_2) = 1 - f(x_1,x_2)$

ii) $(f \oplus g)(x_1,x_2) = \max \{f(x_1,x_2), g(x_1,x_2)\}$

iii) $(f \bullet g)(x_1,x_2) = \min \{f(x_1,x_2), g(x_1,x_2)\}$

a) Geben Sie zwei beliebige, aber konkrete verschiedene Elemente f und g aus $\mathscr{B}$ an, die beide nicht dem neutralen Element einer der beiden Operationen entsprechen! (2 BE)

b) Geben Sie das Ergebnis von $\sim(f \oplus g)$ (0,0) für die von Ihnen in a) gewählten Elemente an! (1 BE)

c) Wenden Sie auf b) die deMorgansche Regel an und beweisen Sie deren Gültigkeit, indem Sie die Zwischenwerte angeben! (2 BE)

4. Aufgabe (4 BE)

Gegeben sei folgende Produktionsregel zur Bildung von Wörtern:

$$\vec{x} \in Varname \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{x} = \alpha\beta & \text{für} \quad \alpha,\beta \in \{a,b,c,...,z\} \\ \vec{x} = \alpha\beta\,\vec{y} & \text{für} \quad \vec{y} \in Varname \quad \text{und} \quad \alpha,\beta \in \{a,b,c,...,z\} \end{cases}$$

Beweisen Sie folgende Behauptung mit vollständiger Induktion über die Wortlänge:

Die Anzahl |x| der Buchstaben eines Wortes x ist immer eine gerade Zahl.

<u>Hinweis:</u> Sie dürfen den Induktionsschritt auch mit Worten begründen.

5. Aufgabe (3 BE)

Benennen Sie die Rechenaufgaben, die man mit einem Taschenrechner durchführen muss, wenn man durch Probedivisionen beweisen will, dass 199 eine Primzahl ist. Sie dürfen voraussetzen, dass die Primzahlen von 2 bis 97 bereits in einer Liste vorgegeben sind. Geben Sie keine überflüssigen Rechenaufgaben an! Welches Ergebnis müssen die einzelnen Rechenaufgaben liefern, damit Sie bewiesen haben, dass 199 eine Primzahl ist?

<u>Hinweis:</u> Sie sollen die Rechenaufgaben nicht konkret durchführen!

6. Aufgabe (8 BE)

a) Geben Sie zu jedem Element aus der Gruppe ($\mathbb{Z}_9$,+) seine Ordnung an! (2 BE)

b) Zeigen Sie, dass ($\mathbb{Z}_9$,*) keine Gruppe ist, indem Sie alle Elemente angeben, die kein Inverses haben. Geben Sie aber von den anderen Elementen ihr Inverses an! (3 BE)

c) Kann man aus ($\mathbb{Z}_9$, +) mit irgendeiner anderen Operationen $\otimes$ einen Körper machen? Begründen Sie Ihre Antwort! (1 BE)

d) Geben Sie eine Teilmenge T von $\mathbb{Z}_9$ explizit in Elementdarstellung an, sodass (T,*) eine Gruppe ist. (2 BE)

7. Aufgabe (8 BE)

a) Geben Sie alle Elemente von GF(9) in Vektorschreibweise an und schreiben Sie zu jedem Element seine Ordnung bezüglich der Addition hinzu. (3 BE)

b) Multiplizieren Sie in GF (9) die Elemente (1,2) und (2,1). Transformieren Sie es dafür in Polynomschreibweise und benutzen Sie das irreduzible Polynom $x^2 + 1$. Geben Sie das Ergebnis dann wieder in Vektorschreibweise an! (5 BE)

8. Aufgabe (4 BE)

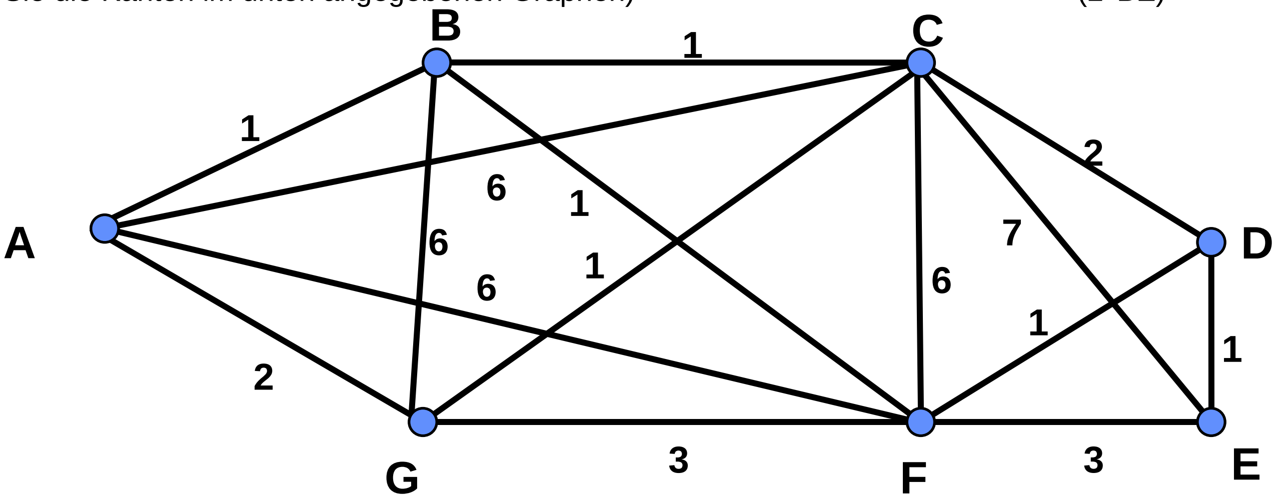
a) Ist die Permutation (1 3 5 4 2) gerade oder ungerade? Begründen Sie Ihre Antwort! (1 BE)

b) Bestimmen Sie die Ordnung der Permutation (1 3 5 4 2). Begründen Sie Ihre Antwort! (3 BE)

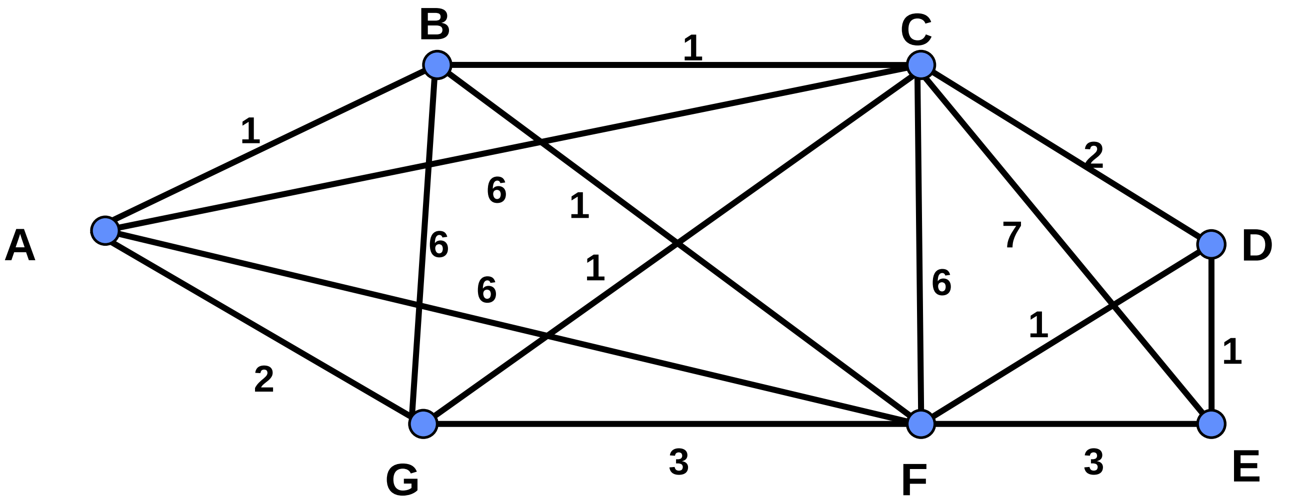
9. Aufgabe (8 BE)

Gegeben sei der unten angegebene Graph.

a) Geben Sie das Gerüst an, welches der Algorithmus von Kruskal berechnet (markieren Sie die Kanten im unten angegebenen Graphen) (2 BE)



b) Geben Sie das Gerüst aus kürzesten Wegen an, welches der Algorithmus von Dijkstra berechnet, wenn er den kürzesten Weg von A nach E berechnen soll (markieren Sie die Kanten im unten angegebenen Graphen) (2 BE)



c) Ist der Graph planar? Begründen Sie Ihre Antwort! (1 BE)

d) Hat der Graph einen Eulerkreis oder einen Eulerweg? Begründen Sie Ihre Antwort! (2 BE)

e) Hat der Graph einen Hamiltonkreis? Begründen Sie Ihre Antwort! (1 BE)

10. Aufgabe (6 BE)

Gegeben Sei die Formel $\neg((p \wedge q) \vee r)$.

a) Bringen Sie die Formel in KNF. Versuchen Sie, mit einer minimalen Anzahl von Klauseln auszukommen! (3 BE)

b) Beschreiben Sie die Formel in Mengendarstellung! (1 BE)

c) Ist die Formel erfüllbar oder widerlegbar? Begründen Sie beide Antworten! (2 BE)

11. Aufgabe (8 BE)

Gegeben seien die folgenden Prädikate mit den zugehörigen Bedeutungen:

L(x,y) x liebt y.

K(x,y) x kennt y.

Der Definitionsbereich für die Parameter ist die Menge aller Menschen.

Beschreiben Sie die folgenden Aussagen mit jeweils einem prädikatenlogischen Ausdruck, der *ausschließlich* die Prädikate L oder K verwendet!

a) Anna liebt Bernd, aber sie kennt ihn nicht. (2 BE)

b) Wer Bernd kennt, liebt ihn nicht. (2 BE)

c) Bernd liebt nur sich selbst. (2 BE)

d) Alle lieben Anna, nur Bernd tut das nicht. (2 BE)

12. Aufgabe (8 BE)

a) Finden Sie zum folgenden Programmausschnitt und der gegebenen Nachbedingung ψ die schwächste Vorbedingung φ!
Vereinfachen Sie die Bedingungen so weit wie möglich (aber nicht noch weiter!)
Geben Sie alle Zwischenschritte Ihrer Beweiskette an! (6 BE)

```
if x = y
   then
      begin



         x := x * y;



         y := - x
      end
   else
      begin



         y := x - y;



         x := y * y
      end
 ψ: x = y
```

b) Geben Sie eine Belegung für x und y an, welche die gegebene Nachbedingung erfüllt und die then-Anweisung durchläuft und geben Sie eine Belegung an, welche die gegebene Nachbedingung erfüllt und die else-Anweisung durchläuft! (2 BE)

13. Aufgabe (10 BE)

Betrachten Sie folgenden Programmausschnitt:

```
n ∈ N \ {0}

  result := 0;
  index := n;

  while (index > 0) do
    begin
      index := index – 1;
      result := result + index
    end
```

a) Seien **$result_i$** und **$index_i$** die Werte der Variablen nach dem i-ten Schleifendurchlauf.
Bestimmen Sie diese Werte durch eine nichtrekursive Formel (probieren Sie es an Beispielen aus!) und beweisen Sie die Formel durch vollständige Induktion über i. (7 BE)
Hinweis: Versuchen Sie nicht, die entstehende Summe durch eine Formel zusammenzufassen, denn das wird nur unübersichtlicher. Arbeiten Sie lieber mit Pünktchen!

b) Folgern Sie aus a), wann die Schleife abbricht und folgern Sie daraus, welche Werte für alle Variablen zum Schluss berechnet werden! (3 BE)

14. Aufgabe (6 BE)

Gegeben sei folgende Funktion **rekursiv**:

```
procedure rekursiv(m,n: integer): integer

begin
   if (n<=0)
      return 0
   else
      return m * rekursiv(m, n-1);
end;
```

a) Von welchem Typ ist die Rekursion? Begründen Sie Ihre Antwort! (2BE)

b) Was berechnet die Funktion in Abhängigkeit von m und n?
Beweisen Sie Ihre Aussage durch vollständige Induktion (4BE)