Fachhochschule Wedel

Prof. Dr. Sebastian Iwanowski

26.01.2012

DM lang

Aufgaben zur Klausur in

***Diskrete Mathematik mit Logik/Verifikation* (WS 2011/2012)**

Studiengänge B_Inf, B_TInf, B_Minf, B_WInf, B_ECom

Zeit: 180 Minuten,

erlaubte Hilfsmittel: Taschenrechner (es geht aber auch ohne)

Bitte tragen Sie Ihre Antworten und fertigen Lösungen ausschließlich an den freien Stellen nach den jeweiligen Aufgaben ein (ggf. auf der jeweiligen Rückseite weiterschreiben).

Diese Klausur besteht einschließlich dieses Deckblatts aus 10 Seiten. Die Aufgaben 1 bis 7 beziehen sich auf die Hauptvorlesung und die Aufgaben 8 bis 12 auf die Teile Logik und Verifikation.

Für die Klausur werden insgesamt 84 Bewertungseinheiten (BE) vergeben. Zum Bestehen benötigen Sie mindestens 42 BE.

Die BE sind ungefähr proportional zur Zeit, die Sie zur Beantwortung der Aufgaben veranschlagen sollten. Abweichungen gibt es in den Aufgaben 1,2 und 9 (wurden etwas wichtiger bewertet, sollte also nicht ganz so viel Zeit beanspruchen) sowie sonst in Abhängigkeit von Ihren Vorkenntnissen.

Viel Erfolg !

1. Aufgabe (9 BE)

a) Geben Sie die folgenden Mengen in Elementschreibweise an. Bei unendlichen Mengen geben Sie mindestens die ersten 4 Zahlen an und vervollständigen Sie mit Pünktchen (Bsp.: {0,1,2,3,…}). (3 BE)

$A = \{x \in \mathbb{N} \mid \exists y \in \mathbb{N}: 10 \cdot y = x\} =$

$B = \{x \in \mathbb{N} \mid \exists y \in \mathbb{N}: 10 \cdot x = y\} =$

$C = \{x \in \mathbb{N} \mid \exists y \in \mathbb{N}: x \cdot y = 10\} =$

b) Berechnen Sie folgende Mengen und stellen Sie das Ergebnis dar wie in a) (5 BE)

$A \cup B =$

$A \cap C =$

$B \cap C =$

$(B \cap C) \setminus (A \cup B) =$

$(B \cap C) \setminus (A \cap C) =$

c) Geben Sie ein beliebiges Element der Potenzmenge von $(B \cap C) \setminus (A \cap C)$ an. (1 BE)

2. Aufgabe (10 BE)

Betrachten Sie die Relation R = „ist Teilmenge von“ auf {A, B, C, D}, wobei

$A = \{10, 20, 30\}$ $B = \{10\}$ $C = \mathbb{N}$ $D = \{\varnothing, 10, 20\}$

a) Ist R eine totale oder nichttotale Ordnungs- oder eine Äquivalenzrelation? Begründen Sie alle Antworten, indem Sie die geforderten Eigenschaften überprüfen! (7 BE)

b) Je nach Ausgang der Antwort in a) (nur eines von beiden ist möglich): (3 BE)

i) Erstellen Sie ein Hassediagramm und kennzeichnen Sie die maximalen und minimalen Elemente.

ii) Charakterisieren Sie die Äquivalenzklassen in Worten.

3. Aufgabe (4 BE)

Bestimmen Sie den ggT und das kgV von 9282 und 22321 mit Hilfe des Euklidischen Algorithmus! Geben Sie die Zwischenschritte an!

4. Aufgabe (7 BE)

a) Zeigen Sie, dass ($\mathbb{Z}_{12}$,+) eine Gruppe ist, indem Sie zu jedem Element sein Inverses angeben. (2 BE)

b) Zeigen Sie, dass ($\mathbb{Z}_{12}$,*) keine Gruppe ist, indem Sie alle Elemente angeben, die kein Inverses haben. (2 BE)

c) Kann man aus $\mathbb{Z}_{12}$ mit irgendwelchen anderen Operationen $\oplus$ und $\otimes$ einen Körper machen? Begründen Sie Ihre Antwort! (1 BE)

d) Geben Sie eine Teilmenge T von $\mathbb{Z}_{12}$ explizit in Elementdarstellung an, die mit der normalen Restklassenoperation * eine Gruppe ist. (2 BE)

5. Aufgabe (5 BE)

a) Geben Sie alle Elemente von GF(16) in Polynomschreibweise an. (2 BE)

b) Multiplizieren Sie in GF (16) die Elemente x^2+1 und x^2+x+1. Benutzen Sie dafür das irreduzibles Polynom $x^4 + x + 1$. (3 BE)

6. Aufgabe (5 BE)

a) Ist die Permutation (1 3) (5 4 2) gerade oder ungerade? Begründen Sie Ihre Antwort! (2 BE)

b) Bestimmen Sie die Ordnung der Permutation (1 3) (5 4 2) (mit Zwischenrechnungen) (3 BE)

7. Aufgabe (9 BE)

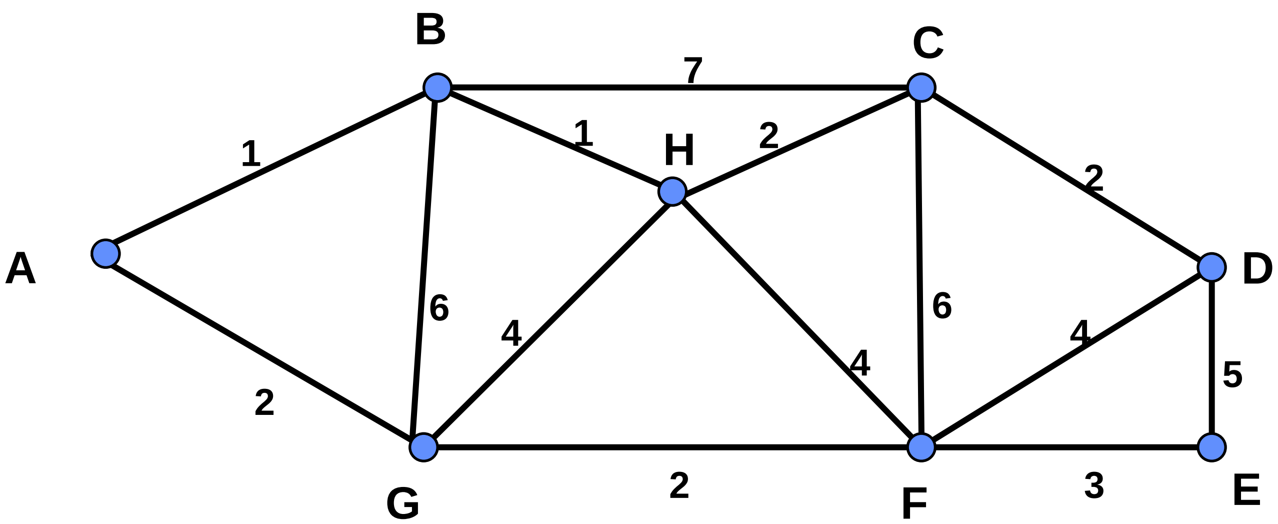
Gegeben sei der unten angegebene Graph.

a) Geben Sie die Reihenfolge der Knoten an, die der Algorithmus von Dijkstra bei der Berechnung des kürzesten Weges von G nach E als endgültig untersuchte Knoten in die Menge `Berechnet` schiebt! Geben Sie außerdem für jeden dieser Knoten (inklusive G und E) an, welche minimale Zahl der Algorithmus als Grundlage für seine Entscheidung ausgerechnet hat, wenn der Knoten in `Berechnet` geschoben wird. (3 BE)

b) Geben Sie das Gerüst an, welches der Algorithmus von Kruskal berechnet (markieren Sie die Kanten im unten angegebenen Graphen) (2 BE)

c) Geben Sie die Ecken-Färbungszahl des Graphen an und begründen Sie Ihre Antwort (2 Begründungen: Warum ist die Zahl nicht größer und warum nicht kleiner). (2 BE)

d) Fügen Sie im unten angegebenen Graphen zusätzliche Kanten zwischen die vorhandenen Ecken hinzu, sodass der Graph nicht mehr planar ist. Die Menge der zusätzlichen Kanten soll minimal sein, d.h. bei Hinzufügung echten Teilmenge der zusätzlichen Kanten ist der Graph noch planar. (2 BE)



8. Aufgabe (4 BE)

Gegeben sei die Formel F: $(a \rightarrow (a \wedge b)) \vee (b \rightarrow \neg a)$

a) Bringen Sie F in eine konjunktive Normalform mit möglichst wenigen Klauseln! (3 BE)

b) Wenn F wahr ist, ist es dann möglich, dass a wahr ist und b nicht? Begründen Sie Ihre Antwort! (1 BE)

9. Aufgabe (9 BE)

Gegeben seien die folgenden Prädikate mit den zugehörigen Bedeutungen:

B(x,y)	Studierende(r) x hat das Fach y bestanden.
T(x,y)	Studierende(r) x hat an der Prüfung im Fach y teilgenommen.
P(y)	y ist ein praktisches Fach (Gegenteil: theoretisches Fach)

Außerdem beschreibe die Menge S alle Studierenden und die Menge F alle Fächer.

Beschreiben Sie die folgenden Aussagen mit jeweils einem prädikatenlogischen Ausdruck, der *ausschließlich* die Prädikate B, T oder K verwendet! Hierbei seien Alex und Berta Studierende aus S, und Ana, DM und PS1 Fächer aus F.

a) Ana und DM sind theoretische Fächer, während PS1 ein praktisches Fach ist. (1 BE)

b) Alex hat alle Fächer bestanden, die theoretische Fächer sind. (2 BE)

c) Linda hat jedes Fach bestanden, an dessen Prüfung sie teilgenommen hat. (2 BE)

d) Alle Studierenden, die ein Fach bestanden haben, haben auch an der Prüfung in diesem Fach teilgenommen. (2 BE)

e) Falls alle Aussagen a) bis d) wahr sind, gelten dann folgende Aussagen? Begründen Sie jeweils Ihre Antwort! (2 BE)

   i) Alex hat an einer Prüfung in mindestens einem Fach teilgenommen.

   ii) Linda hat mindestens ein Fach bestanden.

10. Aufgabe (7 BE)

a) Finden Sie zum folgenden Programmausschnitt und der gegebenen Nachbedingung die schwächste Vorbedingung!
Vereinfachen Sie die Bedingungen so weit wie möglich (aber nicht noch weiter!)
Geben Sie alle Zwischenschritte Ihrer Beweiskette an! (5 BE)

b) Geben Sie eine Belegung für x und y an, welche die gegebene Nachbedingung erfüllt und die then-Anweisung durchläuft und geben Sie eine Belegung an, welche die gegebene Nachbedingung erfüllt und die else-Anweisung durchläuft! (2 BE)

```
if x > y
   then
      begin


         x := - x;


         y := - x
      end
   else
      begin


         y := - y;


         x := - y
      end
{x > y}
```

11. Aufgabe (8 BE)

Gegeben sei die folgende Funktion f:

```
procedure f (n: integer, m: integer): integer
begin
  result := 1;
  k := n;
  while (k > m) do
    begin
      result := result * m;
      k := k-1;
    end;
  return result;
end {f}
```

a) Seien $\mathbf{result}_i$ und $\mathbf{k}_i$ die Werte der Variablen nach dem i-ten Schleifendurchlauf. Bestimmen Sie diese Werte durch eine nichtrekursive Formel und beweisen Sie diese durch vollständige Induktion über i. (5 BE)

b) Folgern Sie aus a), wann die Schleife abbricht und folgern Sie daraus, welche Werte für alle Variablen zum Schluss berechnet werden (also nicht nur der Rückgabewert von f). Geben Sie gegebenenfalls eine Vorbedingung an, die für Ihre Lösung gelten muss! (3 BE)

12. Aufgabe (7 BE)

Gegeben sei folgende Funktion f:

```
procedure f(x: ℕ): ℕ;
begin
 if (x MOD 2 = 0)
    then return x+1
    else return f(x-1)+1
end
```

a) Von welchem Typ ist die Rekursion? Wenn mehrere Antworten möglich sind, dann geben Sie nur den speziellsten Typ an! Begründen Sie Ihre Antwort und geben Sie an, warum die anderen Typen nicht gelten! (3BE)

b) Was berechnet die Funktion in Abhängigkeit von x?

Beweisen Sie Ihre Aussage durch vollständige Induktion (4BE)