Fachhochschule Wedel 25.01.2011

Prof. Dr. Sebastian Iwanowski

Aufgaben zur Klausur in *Diskrete Mathematik* (WS 2010/2011)

Zeit: **100** Minuten

erlaubte Hilfsmittel: Taschenrechner

Bitte tragen Sie Ihre Antworten auf gesonderten karierten Blättern ein (Vorder- und Rückseite benutzen). Markieren Sie klar, welche Lösung zu welcher Aufgabe gehört und als solche gewertet werden soll. Nicht zu wertende Passagen sind durchzustreichen.

Dieses Aufgabenblatt ist nicht abzugeben. **Daher werden Lösungen darauf nicht gewertet.**

Vergessen Sie nicht, das Deckblatt Ihrer Lösungen zu unterschreiben.

Für die Prüfung werden insgesamt 40 Bewertungseinheiten (BE) vergeben. Zum Bestehen benötigen Sie mindestens 20 BE. Viel Erfolg !

1. Aufgabe (7 BE):

Gegeben seien die Mengen A = { 0, 1, 2 }, B = { (0,1), 2 }, C = { {0,1, 2} }, D = { (1,0), {1,2,0}, 3 }:

a) Geben Sie von jeder Menge an, wie viele Elemente sie hat! (1 BE)

b) Geben Sie an, welche Menge Element und welche Menge Teilmenge von einer anderen ist! (2 BE)

c) Geben Sie folgende Mengen explizit an: $B \cap D$, $C \cap D$, $B \setminus D$, Potenzmenge(C) (4 BE)

2. Aufgabe (5 BE)

Gegeben sei die Menge M = { {a}, {a,b}, {a,b,c}, {c,d} }

Betrachten Sie die Relationen $R_1 = \{(x,y) \in M \times M \mid x \subseteq y\}$ und $R_2 = \{(x,y) \in M \times M \mid x \cap y \neq \{\}\}$

a) Sagen Sie von beiden Relationen, ob es sich um eine Äquivalenz- oder eine Ordnungsrelation handelt und begründen Sie Ihre Antwort (eine Begründung pro Relation reicht aus). (2 BE)

b) Geben Sie für jede in a) festgestellte Äquivalenzrelation die Äquivalenzklassen an und für jede in a) festgestellte Ordnungsrelation das Hasse-Diagramm. (2 BE)

c) Fügen Sie noch die leere Menge als Element in M ein. Welche Antwort von a) ändert sich jetzt, und warum? (1 BE)

3. Aufgabe (4 BE)

Gegeben seien folgende Produktionsregeln zur Bildung von gültigen Variablenwörtern **x**:

1. **x** = Hello oder 2. **x** = World oder 3. **x** = Hello**y**World (wobei **y** ein gültiges Variablenwort ist)

Sei n die Länge eines gültigen Variablenwortes.

Beweisen Sie mit vollständiger Induktion über n, dass immer gilt: $n = 5 \cdot m$ für ein $m \in \mathbb{N}$

<u>Tipp:</u> Überlegen Sie sich zunächst, welches die kleinstmögliche Wortlänge ist und wählen Sie dafür die geeignete Induktionsverankerung.

4. Aufgabe (2 BE)

Zeigen Sie auf möglichst einfache Weise: Wenn zwei natürliche Zahlen x und y durch 5 teilbar sind, dann ist die Summe x+y auch durch 5 teilbar.

5. Aufgabe (3 BE)

Beschreiben Sie kurz in Worten, was Sie tun müssen, um mit dem Sieb des Eratosthenes zu bestimmen, ob die Zahl 1 000 001 eine Primzahl ist: Erwähnen Sie insbesondere, wie ein einzelner Schritt aussieht, von dem Sie viele machen müssen. Bis zu welcher Zahl (konkret in diesem Fall) müssen Sie diesen Schritt durchführen?

Hinweis: Sie müssen den Primzahltest hier nicht wirklich durchführen, denn das dauert zu lange!

6. Aufgabe (7 BE)

Gegeben seien die Gruppen ($\mathbb{Z}_4$, +), ($\mathbb{Z}_4^*$, *), ($\mathbb{Z}_2$, +) und ($\mathbb{Z}_2^2$,+).

a) Geben Sie für alle Gruppen die Verknüpfungstafel an. (3 BE)

b) Zwei Gruppen sind isomorph: Geben Sie diese mit dem Isomorphismus an. (2 BE)

c) Begründen Sie, warum die anderen beiden Gruppen zu den beiden in b) nicht isomorph sind und warum sie auch nicht untereinander isomorph sind! (2 BE)

7. Aufgabe (4 BE)

Betrachten Sie n = 27 und bilden Sie den Köper GF(27) mit dieser Anzahl von Elementen:

a) Ist GF(27) isomorph zu $\mathbb{Z}_{27}$? Falls ja, geben Sie den Isomorphismus an. Falls nein, geben Sie an, ob das an der Addition, an der Multiplikation oder am Distributivgesetz von $\mathbb{Z}_{27}$ scheitert. (2 BE)

b) Geben Sie zwei typische Elemente von GF(27) an und führen Sie die Multiplikation durch

Hinweis: Machen Sie sich das so einfach wie möglich! (2 BE)

8. Aufgabe (3 BE)

a) Ist die Permutation (1 3 5) (2 4 6) (5 7 10) gerade oder ungerade? Begründen Sie Ihre Antwort. (2 BE)

b) Wie viele gerade Permutationen aus Zahlen zwischen 1 und 10 gibt es? (1 BE)

9. Aufgabe (5 BE)

a) Zeichnen Sie einen minimalen spannenden Baum für den unten angegebenen Graphen! (2 BE)

b) Wenn Sie den kürzesten Weg von H nach D mit dem Algorithmus von Dijkstra berechnen, zu welchen anderen Zielen wird ebenfalls der kürzeste Weg berechnet und zu welchen nicht? Begründen Sie Ihre Antwort! (2 BE)

c) Ist der Graph planar? Begründen Sie Ihre Antwort! (1 BE)