Aufgaben zur Klausur in *Diskrete Mathematik* (SS 2010)

Zeit: 100 Minuten

erlaubte Hilfsmittel: Taschenrechner

Bitte tragen Sie Ihre Antworten auf gesonderten karierten Blättern ein (Vorder- und Rückseite benutzen). Markieren Sie klar, welche Lösung zu welcher Aufgabe gehört und als solche gewertet werden soll. Nicht zu wertende Passagen sind durchzustreichen.

Dieses Aufgabenblatt ist nicht abzugeben. Daher werden Lösungen darauf nicht gewertet.

Vergessen Sie nicht, das Deckblatt Ihrer Lösungen zu unterschreiben.

Für die Prüfung werden insgesamt 46 Bewertungseinheiten (BE) vergeben. Zum Bestehen benötigen Sie mindestens 23 BE.

Viel Erfolg !

1. Aufgabe (10 BE) Kapitel 2

Gegeben seien folgende Teilmengen der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$:

$A = \{x \mid \exists\, y \in \mathbb{Z}:\ y = x^2\}$ $\qquad B = \{x \mid \exists\, y \in \mathbb{Z}:\ x = y^2\}$ $\qquad C = \{ x \mid \exists\, y \in \mathbb{Z}:\ x = -y^2\}$

$D = \{ x \mid -3 < x < 3\}$ $\qquad E = \{ x \mid \exists\, y \in \mathbb{Z}:\ -3 < x \cdot y < 3\}$

a) Zwei dieser Mengen sind gleich: Geben Sie diese an und begründen Sie Ihre Antwort! (2 BE)

Geben Sie die folgenden Mengen als Aufzählung an, wenn sie endlich sind, bzw. beschreiben Sie diese in Worten, wenn sie unendlich sind und geben Sie dann wenigstens 3 Elemente konkret an:

b) B c) C d) D e) $A \cap D$ f) $B \cap C$

g) $(A \cap D) \setminus (B \cap C)$ h) Potenzmenge $((B \cap C) \setminus (A \cap D))$ (2 BE)

2. Aufgabe (7 BE) Kapitel 2

Gegeben sei die Menge M = {1, 2, 3, 4}

Geben Sie die Antworten zu a), c) und e) jeweils als Menge in Aufzählungsdarstellung:

a) Eine Äquivalenzrelation auf M, welche (1,2) und (2,3) enthält, aber nicht (3,4) (2 BE)

b) Zeichnen Sie die zu a) gehörige Partition! (1 BE)

c) Eine totale Ordnungsrelation auf M, welche (1,2) und (2,3) enthält, aber nicht (3,4) (2 BE)

d) Zeichnen Sie das zu c) gehörige Hasse-Diagramm! (1 BE)

e) Eine bijektive Funktion auf M, welche (1,2) und (2,3) enthält, aber nicht (3,4) (1 BE)

3. Aufgabe (5 BE) Kapitel 2

Gegeben sei die Boolesche Algebra $\mathscr{B}$ = Potenzmenge ({1,2}) mit den Operationen i), ii), iii):

i) $\sim p = \{1,2\} \setminus p$ $\qquad$ ii) $p \oplus q = p \cup q$ $\qquad$ iii) $p \odot q = p \cap q$

a) Geben Sie das Nullelement und das Einselement an! (2 BE)

b) Wählen Sie 2 verschiedene Elemente p,q $\in \mathcal{B}$, die nicht Antwort in a) waren, und zeigen Sie für diese Elemente, dass die deMorgansche Regel für $\sim (p \oplus q)$ gilt!
Geben Sie in Ihrer Rechnung auch die Zwischenwerte an! (3 BE)

4. Aufgabe (6 BE) Kapitel 3

Kevin startet eine Briefkette: Er schreibt 2 Briefe und steckt sie in 2 verschiedene Wedeler Briefkästen. In den Briefen werden die Adressaten gebeten, den Brief zu kopieren und wieder in 2 verschiedene Wedeler Briefkästen zu werfen.

Runde (1) sei die Menge der Adressaten, die von Kevin den Brief bekommen, und Runde (i) sei die Menge der Adressaten, die von einem Menschen aus Runde (i-1) den Brief bekommen. Anzahl (i) sei die Anzahl der Briefe, die in Runde (i) verschickt werden.

a) Geben Sie einen expliziten Wert für Anzahl (x) an! (1 BE)

b) Beweisen Sie die Aussage von b) mit vollständiger Induktion! (3 BE)

c) Wedel hat 32 800 Einwohner. Bis zu wie vielen Runden hat garantiert noch nicht jeder Einwohner einen Brief erhalten? Begründen Sie Ihre Antwort! (2 BE)

5. Aufgabe (3 BE) Kapitel 4

Bestimmen Sie den ggT und das kgV von 62604 und 111333 mit Hilfe des Euklidischen Algorithmus! Geben Sie die Zwischenschritte an!

6. Aufgabe (4 BE) Kapitel 5

a) Geben Sie eine Verknüpfungstabelle für die Gruppe ($\mathbb{Z}_{18}^*$, *) an! (3 BE)

b) Wenn Sie die Operation * in $\mathbb{Z}_{18}^*$ als die additive Verknüpfung auffassen, kann man dann noch eine multiplikative Verknüpfung definieren, sodass aus $\mathbb{Z}_{18}^*$ ein Körper wird? Begründen Sie Ihre Antwort! (1 BE)

7. Aufgabe (4 BE) Kapitel 5

a) Arbeiten Sie für die Multiplikation in GF (27) mit dem Polynom $P(x) = x^3+x^2+x+2$:
Über welchem Körper muss dieses Polynom irreduzibel sein?
Weisen Sie die Irreduzibilität explizit nach! (2 BE)

b) Multiplizieren Sie in GF (27) die Elemente x+1 und 2x+1 (2 BE)

8. Aufgabe (7 BE) Kapitel 7

Gegeben sei der unten angegebene Graph.

a) Gesucht sei der kürzeste Weg von A nach E mit Hilfe des Algorithmus von Dijkstra: Geben Sie die Reihenfolge der Ecken an, in welcher der Algorithmus den kürzeste Weg von A *endgültig bestimmt* hat, bis er den kürzesten Weg zur Ecke E bestimmt hat (nicht die Reihenfolge auf dem kürzesten Weg)! Geben Sie für all diese Ecken die errechnete Weglänge an! (3 BE)

b) Zeichnen Sie einen minimal spannenden Baum dieses Graphen! (2 BE)

c) Geben Sie einen Eulerweg an, indem Sie die korrekte Reihenfolge der Ecken angeben! (2 BE)