Fachhochschule Wedel 28.01.2010

Prof. Dr. Sebastian Iwanowski

Aufgaben zur Klausur und Übergangsprüfung in *Diskrete Mathematik* (WS 2009/2010)

Zeit: 90 Minuten,

erlaubte Hilfsmittel: keine

Bitte tragen Sie Ihre Antworten und fertigen Lösungen auf gesonderten karierten Blättern ein. Markieren Sie klar, welche Lösung zu welcher Aufgabe gehört und als solche gewertet werden soll. Nicht zu wertende Passagen sind durchzustreichen.

Notizen auf diesem Aufgabenblatt werden grundsätzlich nicht gewertet!

Vergessen Sie nicht, das Deckblatt zu unterschreiben.

Für die Prüfung werden insgesamt 36 Bewertungseinheiten (BE) vergeben. Zum Bestehen benötigen Sie mindestens 18 BE.

Viel Erfolg !

1. Aufgabe (7 BE):

Gegeben seien folgende Mengen aus ganzen Zahlen:

$A = \{ x \in \mathbb{Z} \mid x^2 \leq 36 \}$ $\quad B = \{x \in \mathbb{Z} \mid \exists\, y \in \mathbb{Z}: x = 2 \bullet y\}$ $\quad C = \{ x \in \mathbb{Z} \mid \exists\, y \in \mathbb{Z}: x = 4 \bullet y \}$

a) Eine der Mengen ist endlich: Welche, und wie viele Elemente hat sie?

Geben Sie die folgenden 7 Mengen bzw. Wahrheitswerte an (Wahrheitswerte mit Begründung!):

b) $A \cap C$ c) $(A \cap C) \times (A \cap C)$ d) $C \in B$ e) $C \subseteq B$ f) $(C \setminus B) \cap A$ g) $C \in P(B)$

<u>Anm.:</u> Hierbei steht $P(X)$ für die Potenzmenge der Menge X.

2. Aufgabe (6 BE)

Betrachten Sie die Relation R = „ist Teilmenge von“ auf {E, M, O, T, G}, wobei

E = { x | ∃y : x ist Elternteil von y }

M = { x | ∃y : y ist Elternteil von x }

O = { x | ∃y : x ist Großelternteil von y }

T = { x | ∃y : x ist Tante oder Onkel von y (= Geschwister eines Elternteils von y }

G = { x | ∃y : x und y sind Geschwister }.

E, M, O, T und G seien definiert für alle Menschen, die leben bzw. gelebt haben. Hierbei dürfen Sie davon ausgehen, dass jeder Mensch zwei verschiedene Eltern hat, aber nicht jeder Mensch notwendigerweise Kinder haben muss (also wie in der Wirklichkeit).

a) Ist R eine Ordnungs- oder Äquivalenzrelation? Begründen Sie beide Antworten! (3 BE)

b) Je nach Ausgang der Antwort in a) (nur eines von beiden ist möglich): (3 BE)

i) Erstellen Sie ein Hassediagramm und kennzeichnen bzw. benennen Sie die maximalen und minimalen Elemente.

ii) Charakterisieren Sie die Äquivalenzklassen in Worten.

3. Aufgabe (5 BE)

Betrachten Sie die Menge der Booleschen Schaltfunktionen für n = 2:

$\mathscr{B} = \{f:\{0,1\}^2 \to \{0,1\}\}$ mit den Operationen i), ii), iii):

i) $\sim f(x_1,x_2) = 1 - f(x_1,x_2)$

ii) $(f \oplus g)(x_1,x_2) = \max\{f(x_1,x_2), g(x_1,x_2)\}$

iii) $(f \bullet g)(x_1,x_2) = \min\{f(x_1,x_2), g(x_1,x_2)\}$

a) Geben Sie zwei beliebige, aber konkrete verschiedene Elemente f und g aus $\mathscr{B}$ an, die beide nicht dem neutralen Element einer der beiden Operationen entsprechen! (2 BE)

b) Geben Sie das Ergebnis von $((f \oplus g)\bullet(\sim f))\,(0,0)$ für die von Ihnen in a) gewählten Elemente an! (1 BE)

c) Geben Sie für b) das Distributivgesetz an und beweisen Sie dessen Gültigkeit, indem Sie die Zwischenwerte angeben! (2 BE)

4. Aufgabe (4 BE)

Es kommen n Ehepaare an einem Brunnen vorbei, in den jeder Mann und jede Frau eine Münze werfen. Insgesamt liegen also 2n Münzen im Brunnen. Diese bleibt entweder mit Kopf oder mit Zahl nach oben liegen, was als Lage der Münze bezeichnet wird.

Beweisen Sie mit vollständiger Induktion über n: Mindestens n Münzen haben dieselbe Lage.

5. Aufgabe (4 BE)

a) Geben Sie die Ordnung des Elements $(2,0,2,0,2) \in (\mathbb{Z}_6)^5$ bezüglich der Addition an und begründen Sie das durch Angabe der Zwischenwerte! (2 BE)

b) Kann man mit dem Element (2,0,2,0,2) alle Elemente von $((\mathbb{Z}_6)^5,+)$ erzeugen? (Begründung) (1 BE)

c) Ist die Gruppe $((\mathbb{Z}_6)^5,+)$ zu einem Körper erweiterbar? (Begründung) (1 BE)

6. Aufgabe (5 BE)

a) Arbeiten Sie für die Multiplikation in GF (16) mit dem Polynom x^4+x+1: Über welchem Körper muss dieses Polynom irreduzibel sein? Testen Sie die Nullstellenfreiheit und geben Sie an, warum dieser Test als Nachweis nicht ausreicht!

(Anm.: Es wird versprochen, dass die Irreduzibilität hier trotzdem gilt.) (3 BE)

b) Multiplizieren Sie in GF (16) die Elemente $x+1$ und x^3+1 mit Hilfe des Polynoms aus a) (2 BE)

7. Aufgabe (5 BE)

Gegeben sei der unten angegebene Graph.

a) Geben Sie die Reihenfolge der Ecken an, die der Algorithmus von Dijkstra bei der Berechnung des kürzesten Weges von G nach E als endgültig untersuchte Ecken in die Menge `Berechnet` schiebt! Geben Sie außerdem für jede dieser Ecken (inklusive G und E) an, welche minimale Zahl der Algorithmus als Grundlage für seine Entscheidung ausgerechnet hat, wenn er die Ecke in `Berechnet` schiebt. (2 BE)

b) Geben Sie die (Ecken-)Färbungszahl des Graphen an und begründen Sie Ihre Antwort: Warum ist die Zahl nicht größer und warum nicht kleiner? (2 BE)

c) Ist der Graph planar (= plättbar) (Begründung!) (1 BE)