Fachhochschule Wedel 10.09.2009

Prof. Dr. Sebastian Iwanowski

Aufgaben zur 2. Übergangsprüfung in *Diskrete Mathematik* (SS 2009)

Zeit: 90 Minuten

erlaubte Hilfsmittel: Taschenrechner (aber nicht erforderlich)

Bitte tragen Sie Ihre Antworten und fertigen Lösungen auf gesonderten karierten Blättern ein (Vorder- und Rückseite benutzen). Markieren Sie klar, welche Lösung zu welcher Aufgabe gehört und als solche gewertet werden soll. Nicht zu wertende Passagen sind durchzustreichen.

Dieses Aufgabenblatt ist nicht abzugeben. **Daher werden Lösungen darauf nicht gewertet.**

Vergessen Sie nicht, das Deckblatt Ihrer Lösungen zu unterschreiben.

Für die Prüfung werden insgesamt 40 Bewertungseinheiten (BE) vergeben. Zum Bestehen benötigen Sie mindestens 20 BE. Viel Erfolg !

1. Aufgabe (7 BE):

Gegeben seien die folgenden Teilmengen der natürlichen Zahlen (inklusive 0):

$A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 3\}$

$B = \{x \in \mathbb{N} \mid x \geq 5\}$

$C = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ ist Teiler von } 15\}$

a) Beschreiben Sie die Mengen $A \cap B$, $A \cup C$, $A \cap C$ und $B \cap C$ durch Elementaufzählung! (4 Mengen) (4 BE)

b) Geben Sie die Wahrheitswerte der Aussagen i) – iii) an (mit Begründung): (3 BE)

i) $(A \cap B) \in (A \cup C)$

ii) $(B \cap C) \subseteq (A \cup C)$

iii) $(A \cap B) \subseteq C$

2. Aufgabe (4 BE)

Betrachten Sie folgende Relation: $R = \{(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid x + y \text{ ist eine gerade Zahl}\}$

a) Entscheiden Sie, ob R eine Äquivalenzrelation ist und begründen Sie Ihre Antwort. Falls ja, geben Sie an, wie viele Äquivalenzklassen es gibt und beschreiben Sie diese in Worten!

b) Entscheiden Sie, ob R eine Ordnungsrelation ist und begründen Sie Ihre Antwort. Falls ja, geben Sie das Hasse-Diagramm für die Zahlen 1 bis 10 an!

c) Entscheiden Sie, ob R eine Funktion ist und begründen Sie Ihre Antwort. Falls ja, beschreiben Sie die Bildmenge in Worten!

3. Aufgabe (3 BE)

a) Skizzieren Sie den Beweis dafür, dass die Menge $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ gleichmächtig der Menge $\mathbb{N}$ ist! (2 BE)

b) Kann man mit derselben Methode auch zeigen, dass die Menge $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ gleichmächtig der Menge $\mathbb{Q}$ ist? Begründen Sie Ihre Antwort! (1 BE)

4. Aufgabe (6 BE)

a) Beweisen Sie durch vollständige Induktion folgenden Satz: Von zwei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen ist immer mindestens eine gerade. (5 BE)

b) Folgern Sie aus a) als Korollar: Zwei aufeinanderfolgende Zahlen können nicht beide Primzahlen sein. (1 BE)

5. Aufgabe (5 BE)

a) Geben Sie eine Verknüpfungstabelle für die Gruppe ($\mathbb{Z}_{12}^{*}$, *) an! (2 BE)

b) Ist die Gruppe isomorph zur Gruppe ($\mathbb{Z}_4$, +) ? Begründen Sie Ihre Antwort! (2 BE)

c) Beantworten Sie die Frage aus b) für ($\mathbb{Z}_4$, *) ! (1 BE)

6. Aufgabe (5 BE)

a) Zeigen Sie, dass $x^2 + 2x + 2$ ein irreduzibles Polynom für die Multiplikationstabelle von GF (9) ist! (2 BE)

b) Betrachten Sie die Polynome x + 2 und x + 1 als Elemente von GF(9): Berechnen Sie das Produkt dieser Polynome mit dem in a) angegebenen irreduziblen Polynom! (3 BE)

7. Aufgabe (3 BE)

a) Berechnen Sie die Komposition der Permutation (2 4 3) (4 5 1) ! (gegeben in Zyklenschreibweise, von rechts nach links) (1 BE)

b) Zeigen Sie an diesem Beispiel, dass die Komposition nicht kommutativ ist! (1 BE)

c) Stellen Sie das Ergebnis von a) als Komposition von Transpositionen dar. Handelt es sich um eine gerade oder eine ungerade Permutation? (1 BE)

8. Aufgabe (7 BE)

a) Zeichnen Sie einen minimalen spannenden Baum für den unten angegebenen Graphen!(2 BE)

b) Ist der Graph planar (=plättbar)? Begründen Sie Ihre Antwort! (2 BE)

c) Geben Sie die (Ecken-)Färbungszahl des Graphen an und begründen Sie Ihre Antwort! (2 Begründungen: Warum ist die Zahl nicht größer und warum nicht kleiner) (2 BE)

d) Hat der Graph einen Eulerweg? Begründen Sie Ihre Antwort! (1 BE)