Fachhochschule Wedel 05.03.2009

Prof. Dr. Sebastian Iwanowski

# Aufgaben zur 2. Übergangsprüfung in *Diskrete Mathematik* (WS 2008/2009)

Zeit: 90 Minuten

erlaubte Hilfsmittel: Taschenrechner

Bitte tragen Sie Ihre Lösungen auf gesonderten karierten Blättern ein (Vorder- und Rückseite benutzen). Markieren Sie klar, welche Lösung zu welcher Aufgabe gehört und als solche gewertet werden soll. Nicht zu wertende Passagen sind durchzustreichen.

Dieses Aufgabenblatt ist nicht abzugeben. **Daher werden Lösungen darauf nicht gewertet.**

Vergessen Sie nicht, das offizielle Deckblatt Ihrer Lösungen zu unterschreiben.

Für die Prüfung werden insgesamt 37 Bewertungseinheiten (BE) vergeben. Zum Bestehen benötigen Sie mindestens 18,5 BE.

Viel Erfolg !

## 1. Aufgabe (6 BE):

Gegeben sei die Menge M = {1, 2, 3, 4, 5}

a) Kann man die Menge {(1,3); (3,1); (2,4); (4,2)} zu einer bijektiven Funktion auf M ergänzen? Geben Sie als Antwort eine Lösung an bzw. begründen Sie, warum das nicht geht! (1 BE)

b) Wie viele Elemente hat die Potenzmenge von M? Geben Sie 3 <u>verschiedene</u> Elemente aus der Potenzmenge an! (2 BE)

c) Wie viele Elemente hat die Schnittmenge von M mit ihrer Potenzmenge und wie viele die Vereinigungsmenge? Begründen Sie Ihre Antwort! (3 BE)

## 2. Aufgabe (6 BE)

Betrachten Sie die Menge M = {Mensch, Salat, Ziege, Wolf} und die Relation R auf M mit:

$$(x,y) \in R \quad \Leftrightarrow \quad x \text{ (fr)isst } y$$

a) Geben Sie die Relation R in Mengendarstellung explizit an! (1 BE)

b) Ist R eine Äquivalenzrelation oder eine Ordnungsrelation oder eine Funktion? Fassen Sie hierfür die Relation R als Teilmenge von MxM auf. Geben Sie für alle drei Eigenschaften eine Begründung an! (2 BE)

c) Fügen Sie noch Elemente zu R hinzu (bei gleich bleibendem M), sodass es sich jetzt um eine Ordnungsrelation handelt, und zeichnen Sie das zugehörige Hasse-Diagramm! (3 BE)

## 3. Aufgabe (5 BE)

Gegeben sei die Boolesche Algebra $\mathscr{B} = \{x \in \mathbb{N}: x \mid 42\}$ mit den Operationen:

i) $\sim x = 42 \setminus x$ ii) $p \oplus q = \text{ggT}(p,q)$ iii) $p \odot q = \text{kgV}(p,q)$

a) Geben Sie $\mathscr{B}$ in Elementschreibweise an und benennen Sie das Nullelement und das Einselement! (2 BE)

b) Wählen Sie 3 <u>verschiedene</u> Elemente $p,q,r \in \mathscr{B}$ und zeigen Sie für diese Elemente, dass das Distributivgesetz sowohl für $(p \oplus q) \odot r$ als auch für $(p \odot q) \oplus r$ erfüllt ist (2 Aufgaben)! Geben Sie in Ihrer Rechnung auch die Zwischenwerte an! (3 BE)

## 4. Aufgabe (5 BE):

Beweisen Sie durch vollständige Induktion über n:

$\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \; \exists k_n \in \mathbb{Z}: 7^n = 6 \cdot k_n + 1$ (7 hoch n)

Hinweis: Versuchen Sie, im Beweis $k_{n+1}$ aus $k_n$ zu erzeugen!

## 5. Aufgabe (4 BE):

a) Geben Sie für das Element (1,2,0,0,2,1) eine geeignete endliche Additionsgruppe an, in der es enthalten ist! (1 BE)

b) Bestimmen Sie in der in a) angegebenen Gruppe die Ordnung und das inverse Element von (1,2,0,0,2,1). Beweisen Sie die Ordnung durch Zwischenrechnungen! (2 BE)

b) Geben Sie an, ob die in a) angegebene Gruppe zu einem Körper erweitert werden kann und begründen Sie Ihre Antwort! (1 BE)

## 6. Aufgabe (6 BE):

a) Berechnen Sie $x^3 + 4x^2 + 2x + 1 \bmod x^3 + 4x + 2$ in $\mathbb{Z}_5$ (2 BE)

b) Wie viele Elemente hat der Körper, für den diese Berechnung für eine Elementmultiplikation relevant sein könnte? (1 BE)

c) Geben Sie ein Kriterium an, das erfüllt sein muss, damit diese Berechnung tatsächlich für die Elementmultiplikation relevant ist, und weisen Sie das hier explizit nach! (3 BE)

## 7. Aufgabe (5 BE)

Gegeben sei der untenstehende Graph.

a) Bestimmen Sie den minimalen spannenden Baum mit dem Algorithmus von Kruskal: Zeichnen Sie den Baum auf Ihr Lösungsblatt, benennen Sie die verbundenen Ecken und geben Sie das Gesamtgewicht an! (3 BE)

b) Untersuchen Sie, ob es einen Eulerkreis oder Eulerweg gibt und begründen Sie Ihre Antwort! (1 BE)

c) Geben Sie einen Hamiltonkreis an! (richtige Reihenfolge der Ecken reicht aus) (1 BE)