
Aufgaben zur 2. Übergangsprüfung in *Diskrete Mathematik (WS 2007 / 2008)*

Zeit: 90 Minuten,

erlaubte Hilfsmittel: Taschenrechner (nützlich in Aufgabe 4)

Bitte tragen Sie Ihre Antworten und fertigen Lösungen auf gesonderten karierten Blättern ein. Lösungen auf diesem Aufgabenblatt werden in keinem Fall gewertet.

Vergessen Sie nicht, das Deckblatt auszufüllen und zu unterschreiben.

Für die Prüfung werden insgesamt 40 Bewertungseinheiten (BE) vergeben. Zum Bestehen benötigen Sie mindestens 20 BE.

Viel Erfolg !

1. Aufgabe (6 BE):

Gegeben sei als Grundmenge Ω die Menge aller Wörter der deutschen Sprache. Ferner seien folgende Teilmengen von Ω gegeben:

$A = \{x \mid x \text{ ist ein Wort, das lexikographisch}^1 \text{ kleiner ist (nicht gleich!) als OTTO}\}$

$B = \{x \mid x \text{ ist ein Wort, das lexikographisch}^1 \text{ größer ist (nicht gleich!) als ANNA}\}$

$C = \{x \mid x \text{ ist ein Wort, das mehr als 4 Buchstaben hat}\}$

Geben Sie für jede der folgenden Mengen ein Element an, das in dieser Menge liegt, oder begründen Sie, warum das nicht möglich ist (insgesamt werden also 6 Antworten erwartet):

$\sim(A \cup B)$, $\sim A \cup B$, $\sim(A \cap B)$, $\sim A \cap B$, $A \Delta C$, $\sim(A \Delta C)$

Anm.: Hierbei steht \sim für das Komplement (bzgl. Ω) und Δ für die symmetrische Differenz.

2. Aufgabe (6 BE):

Die Relation **APartner** (X, Y) auf der Menge aller Wörter sei definiert als:

APartner (X, Y) \Leftrightarrow Das Wort X hat dieselbe Anzahl von "A"s (als Buchstaben) wie Y

- Untersuchen Sie, ob **APartner** eine Ordnungs- und ob es eine Äquivalenzrelation ist. Begründen Sie Ihre Antwort für **beide** Relationstypen, indem Sie angeben, welches für Ihre Antwort relevante Gesetz erfüllt ist und welches nicht! (3 BE)
- Zeichnen Sie ein vollständiges Hasse-Diagramm bzw. geben Sie die Äquivalenzklassen an der Relation **APartner** für die Wörter LEER, REAL, LARA, LEHR, ER, RAT (2 BE)
- Wenn Sie das Wort LEHR als Element einer exakt definierten mathematischen Struktur darstellen wollen, welche Darstellung ist die richtige: $\{L, E, H, R\}$ oder (L, E, H, R) ? Begründen Sie Ihre Antwort (genau eine ist richtig)! (1 BE)

¹ lexikographisch bedeutet: Ein größeres Wort kommt im Lexikon danach, ein kleineres davor

3. Aufgabe (4 BE)

Benutzen Sie folgende Definition für $n!$: $0! = 1$; $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1: n! = n \cdot (n-1)!$

Beweisen Sie durch vollständige Induktion für alle $n \geq 1$: $n! = \prod_{k=1}^n k$

Geben Sie im Beweis an, wo Sie die Definition und wo Sie die Induktionsannahme benutzen!

4. Aufgabe (3 BE)

Bestimmen Sie den ggT und das kgV von 3131 und 5983 mit Hilfe des Euklidischen Algorithmus! Geben Sie die Zwischenschritte an!

5. Aufgabe (6 BE)

- Geben Sie eine Verknüpfungstabelle für die Gruppe $(\mathbb{Z}_{12}^*, *)$ an! (3 BE)
- Zu welcher Additionsgruppe ist $(\mathbb{Z}_{12}^*, *)$ isomorph? Geben Sie den Isomorphismus explizit an! (2 BE)
- Wenn Sie die Operation $*$ in \mathbb{Z}_{12}^* als die *additive* Verknüpfung auffassen, kann man dann noch eine multiplikative Verknüpfung definieren, sodass aus \mathbb{Z}_{12}^* ein Körper wird? Geben Sie eine kurze Begründung für Ihre Antwort ab (anderenfalls gibt es keinen Punkt)! (1 BE)

6. Aufgabe (5 BE)

- Über welchem Körper muss ein Polynom, das als Restklassenpolynom für die Multiplikation in GF (125) benutzt werden soll, irreduzibel sein? (1 BE)
- Ist das Polynom x^3+x+1 über GF (125) irreduzibel? (Begründung!) (2 BE)
- Multiplizieren Sie in GF (125) die Elemente $x+1$ und $3x+4$! (2 BE)

7. Aufgabe (4 BE)

Geben Sie alle geraden Permutationen aus 3 Elementen an (in einer von Ihnen gewählten Schreibweise)! Begründen Sie, dass die von Ihnen angegebenen Permutationen gerade sind und dass es keine weiteren gibt!

8. Aufgabe (6 BE)

Gegeben sei der unten angegebene Graph.

- Geben Sie die Reihenfolge der Knoten an, die der Algorithmus von Dijkstra bei der Berechnung des kürzesten Weges von G nach E als endgültig untersuchte Knoten in die Menge *Berechnet* schiebt! Geben Sie außerdem für jeden dieser Knoten (inklusive G und E) an, welche minimale Zahl der Algorithmus als Grundlage für seine Entscheidung ausgerechnet hat, wenn der Knoten in *Berechnet* geschoben wird. (2 BE)
- Ist der Graph planar (=plättbar)? Begründen Sie Ihre Antwort! (2 BE)
- Geben Sie die (Ecken-)Färbungszahl des Graphen an und begründen Sie Ihre Antwort (2 Begründungen: Warum ist die Zahl nicht größer und warum nicht kleiner). (2 BE)

