Fachhochschule Wedel 29.01.2008

Prof. Dr. Sebastian Iwanowski

Aufgaben zur Klausur und Übergangsprüfung in *Diskrete Mathematik* (WS 2007/2008)

Zeit: 90 Minuten,

erlaubte Hilfsmittel: keine

Bitte tragen Sie Ihre Antworten und fertigen Lösungen auf gesonderten karierten Blättern ein. Markieren Sie klar, welche Lösung zu welcher Aufgabe gehört und als solche gewertet werden soll. Nicht zu wertende Passagen sind durchzustreichen.

Notizen auf diesem Aufgabenblatt werden grundsätzlich nicht gewertet!

Vergessen Sie nicht, das Deckblatt zu unterschreiben.

Für die Prüfung werden insgesamt 40 Bewertungseinheiten (BE) vergeben. Zum Bestehen benötigen Sie mindestens 20 BE.

Viel Erfolg !

1. Aufgabe (5 BE):

a) Geben Sie die Menge $\mathscr{M}$ in Elementschreibweise an, die aus allen Wörtern besteht, die aus einer Permutation der Buchstaben des Wortes TOM hervorgehen (*keine* Vertauschung soll auch enthalten sein). Hierbei soll es keine Rolle spielen, ob das Wort in irgendeiner Sprache einen Sinn ergibt: Es sollen alle theoretisch möglichen Kombinationen gebildet werden. (1 BE)

b) Geben Sie die Anzahl der Elemente der Potenzmenge von $\mathscr{M}$ an, und geben Sie ein beliebiges Element dieser Potenzmenge an. (2 BE)

c) Geben Sie die Schnittmenge von $\mathscr{M}$ und seiner Potenzmenge an. (1 BE)

d) Bilden Sie die Menge $\mathscr{M}' = \mathscr{M} \setminus$ {TOM, MO, MOT, MOTTO}. (1 BE)

2. Aufgabe (7 BE)

Betrachten Sie die Relation R = „ist Teilmenge von“ auf {E, M, O, H, G}, wobei

E = { x | $\exists$y : x ist Elternteil von y }

M = { x | $\exists$y : y ist Elternteil von x }

O = { x | $\exists$y : x ist Großelternteil von y }

H = { x | $\exists$y : x und y haben genau 1 Elternteil gemeinsam (x $\neq$ y) }

G = { x | $\exists$y : x und y haben mindestens 1 Elternteil gemeinsam (x $\neq$ y) }.

E, M, O, H und G seien definiert für alle Menschen, die leben bzw. gelebt haben. Hierbei dürfen Sie davon ausgehen, dass jeder Mensch zwei verschiedene Eltern hat, aber nicht jeder Mensch notwendigerweise Kinder haben muss (also wie in der Wirklichkeit).

a) Ist R eine Ordnungs- oder Äquivalenzrelation? Begründen Sie beide Antworten! (4 BE)

b) Je nach Ausgang der Antwort in a) (nur eines von beiden ist möglich): (3 BE)

   i) Erstellen Sie ein Hassediagramm und kennzeichnen Sie die maximalen und minimalen Elemente.

   ii) Charakterisieren Sie die Äquivalenzklassen in Worten.

3. Aufgabe (6 BE)

Betrachten Sie die Schaltfunktionen-Algebra { f: $\{0,1\}^2 \rightarrow \{0,1\}$ }

mit $(f \oplus g)(x,y) = \max\{f(x,y); g(x,y)\}$ und $(f \odot g)(x,y) = \min\{f(x,y); g(x,y)\}$ und $\sim f(x,y) = 1 - f(x,y)$

Gegeben seien die beiden konkreten Funktionen f_1 und f_2 mit

$f_1(0,0) = 0$; $f_1(0,1) = 1$; $f_1(1,0) = 0$; $f_1(1,1) = 1$ und

$f_2(0,0) = 1$; $f_2(0,1) = 0$; $f_2(1,0) = 0$; $f_2(1,1) = 1$

a) Geben Sie die Funktion $f_3 = \sim f_1 \oplus (f_1 \odot f_2)$ an! (4 BE)

b) Demonstrieren Sie die Gültigkeit des Distributivgesetzes am Beispiel von a) mit dem Argument (1,1) (andere müssen nicht demonstriert werden): Geben Sie hierfür auch die Zwischenwerte an! (2 BE)

4. Aufgabe (4 BE)

Sei F_n die n-te Fibonaccizahl, rekursiv definiert als $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$, $n \geq 0$

Beweisen Sie mit vollständiger Induktion, dass $1 + \sum_{i=0}^{n} F_i = F_{n+2}$ für alle $n \geq 0$.

5. Aufgabe (6 BE)

a) Geben Sie eine Verknüpfungstabelle für die Gruppe $(\mathbb{Z}_8^*, *)$ an! (3 BE)

b) Zu welcher Additionsgruppe ist $(\mathbb{Z}_8^*, *)$ isomorph? Geben Sie den Isomorphismus explizit an! (2 BE)

c) Wenn Sie die Operation * in $\mathbb{Z}_8^*$ als die *additive* Verknüpfung auffassen, kann man dann noch eine multiplikative Verknüpfung definieren, sodass aus $\mathbb{Z}_8^*$ ein Körper wird? Geben Sie eine kurze Begründung für Ihre Antwort ab (anderenfalls gibt es keinen Punkt)! (1 BE)

6. Aufgabe (6 BE)

a) Arbeiten Sie für die Multiplikation in GF (16) mit dem Polynom x^4+x+1: Über welchem Körper muss dieses Polynom irreduzibel sein? Weisen Sie die Irreduzibilität explizit nach! Könnte man auch das irreduzible Polynom x^3+x+1 nehmen ? (3 Aufgaben) (3 BE)

b) Multiplizieren Sie in GF (16) die Elemente x^2+1 und x^2+x+1 mit Hilfe des Polynoms aus a) (3 BE)

7. Aufgabe (6 BE)

Gegeben sei der unten angegebene Graph.

a) Geben Sie die Reihenfolge der Knoten an, die der Algorithmus von Dijkstra bei der Berechnung des kürzesten Weges von G nach E als endgültig untersuchte Knoten in die Menge `Berechnet` schiebt! Geben Sie außerdem für jeden dieser Knoten (inklusive G und E) an, welche minimale Zahl der Algorithmus als Grundlage für seine Entscheidung ausgerechnet hat, wenn der Knoten in `Berechnet` geschoben wird. (2 BE)

b) Geben Sie die (Ecken-)Färbungszahl des Graphen an und begründen Sie Ihre Antwort (2 Begründungen: Warum ist die Zahl nicht größer und warum nicht kleiner). (2 BE)

c) Geben Sie einen minimal spannenden Baum an (mit Angabe der Gesamtlänge). (2 BE)