

---

## Aufgaben zur 2. Übergangsprüfung in *Diskrete Mathematik (SS 2007)*

Zeit: 90 Minuten,

erlaubte Hilfsmittel: Taschenrechner

Bitte tragen Sie Ihre Antworten und fertigen Lösungen auf gesonderten karierten Blättern ein.

Vergessen Sie nicht, das Deckblatt auszufüllen und zu unterschreiben.

Für die Prüfung werden insgesamt 40 Bewertungseinheiten (BE) vergeben. Zum Bestehen benötigen Sie mindestens 20 BE.

Viel Erfolg !

### 1. Aufgabe (6 BE):

Gegeben seien folgende Teilmengen der natürlichen Zahlen:

$A = \{x \mid x \text{ ist durch } 4 \text{ teilbar, d.h. es ist Austragungsjahr von olympischen Sommerspielen}\}$

$B = \{x \mid x \text{ ist durch } 100 \text{ teilbar}\}$

$C = \{x \mid x \text{ ist durch } 400 \text{ teilbar}\}$

$D = \{x \mid x \text{ ist durch } 2 \text{ teilbar}\}$

$F = \{x \mid x \text{ ist Austragungsjahr einer Fußballweltmeisterschaft, d.h. es ist durch } 2, \text{ aber nicht durch } 4 \text{ teilbar}\}$

$S = \{x \mid x \text{ ist ein Schaltjahr, d.h. es ist durch } 4, \text{ aber nicht durch } 100 \text{ teilbar, oder es ist durch } 400 \text{ teilbar}\}$

$W = \{x \mid x \text{ ist ein Austragungsjahr von olympischen Winterspielen, d.h. es liegt } 2 \text{ Jahre nach olympischen Sommerspielen}\}.$

- a) Beschreiben Sie die Mengen  $F$  und  $S$  als Verknüpfung anderer Mengen (2 Aufgaben!):  
Sie dürfen nur die Mengennamen und Verknüpfungssymbole zwischen Mengen benutzen. (3 BE)
- b) Geben Sie die folgenden 3 Mengen in Elementschreibweise an:  
 $\{x \mid 1994 \leq x \leq 2010\} \cap S$  ;  $\{x \mid 1994 \leq x \leq 2010\} \cap F \cap W$  ;  $\{x \mid 1994 \leq x \leq 2010\} \cap F \cap S$  (3 BE)

### 2. Aufgabe (8 BE):

Eine Relation auf der Menge aller Wörter sei definiert als:

$A \sim B \Leftrightarrow$  Das Wort  $B$  ist in Wort  $A$  enthalten (Bsp: KLAUSUR  $\sim$  AUS)

- a) Ist diese Relation eine Ordnungs- oder eine Äquivalenzrelation?  
Geben Sie als Begründung an, welche Eigenschaften die Relation erfüllt, und geben Sie ein Gegenbeispiel an für Eigenschaften, die die Relation nicht erfüllt! (4 BE)
- b) Zeichnen Sie ein vollständiges Hasse-Diagramm der Relation für die Wörter TOR, ROT, TORNADO, ROTOR, KONTOR, KONTO, TORNADOROT (3 BE)
- c) Benennen Sie die maximalen und minimalen Elemente von b) (1 BE)

### 3. Aufgabe (3 BE)

Skizzieren Sie den Beweis dafür, dass die Menge  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$  gleichmächtig der Menge  $\mathbb{N}$  ist!

### 4. Aufgabe (4 BE):

Beweisen Sie durch vollständige Induktion über  $n$ :  $\sum_{i=0}^n 3^i = \frac{3^{n+1} - 1}{2}$

### 5. Aufgabe (4 BE)

- Geben Sie eine Verknüpfungstabelle für die Gruppe  $(\mathbb{Z}_{14}^*, *)$  an! (3 BE)
- Wenn Sie die Operation  $*$  in  $\mathbb{Z}_{14}^*$  als die additive Verknüpfung auffassen, kann man dann noch eine multiplikative Verknüpfung definieren, sodass aus  $\mathbb{Z}_{14}^*$  ein Körper wird? Begründen Sie Ihre Antwort! (1 BE)

### 6. Aufgabe (3 BE)

Martha Naseweis gefällt die komplizierte Methode ihres Professors zur Konstruktion endlicher Körper nicht. Sie meint, das ginge einfacher und liefert für 4 Elemente das Beispiel:

+	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

•	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	3	1
3	0	3	1	2

- Zeigen Sie an einem Beispiel, dass Martha das Distributivgesetz verletzt hat! (3 BE)
- Welche Operationstafel muss Martha verändern, um doch noch einen Körper zu erhalten? (Angabe der Lösung nicht erforderlich) (1 BE)

### 7. Aufgabe (4 BE)

- Berechnen Sie die Komposition der Permutation  $(2\ 4\ 5\ 3)(4\ 5\ 1\ 2)$ ! (gegeben in Zykelschreibweise) (1 BE)
- Zeigen Sie an diesem Beispiel, dass die Komposition nicht kommutativ ist! (1 BE)
- Stellen Sie das Ergebnis von a) als Komposition von Transpositionen dar. Handelt es sich um eine gerade oder eine ungerade Permutation? (2 BE)

### 8. Aufgabe (8 BE)

Gegeben sei der nebenstehende Graph. Hierbei bezeichnen die Buchstaben die Ecken und die Ziffern die Kanten. Die Kantenlänge sei gleich ihrer Ziffer.

- Geben Sie einen minimal spannenden Baum an! (2 BE)
- Geben Sie das Gerüst an, das entsteht, wenn der kürzeste Weg von A nach F mit dem Algorithmus von Dijkstra berechnet wird! Geben Sie an, zu welcher Ecke der kürzeste Weg noch nicht berechnet wurde! (3 BE)
- Ist der Graph planar? Begründen Sie Ihre Antwort! (1 BE)
- Geben Sie die (Ecken-)Färbungszahl des Graphen an und begründen Sie Ihre Antwort! (2 BE)

