Fachhochschule Wedel 14.08.2007

Prof. Dr. Sebastian Iwanowski

Aufgaben zur Klausur und Übergangsprüfung in *Diskrete Mathematik* (SS 2007)

Zeit: 90 Minuten

erlaubte Hilfsmittel: Taschenrechner

Bitte tragen Sie Ihre Antworten und fertigen Lösungen auf gesonderten karierten Blättern ein (Vorder- und Rückseite benutzen). Markieren Sie klar, welche Lösung zu welcher Aufgabe gehört und als solche gewertet werden soll. Nicht zu wertende Passagen sind durchzustreichen.

Dieses Aufgabenblatt ist nicht abzugeben. Daher werden Lösungen darauf nicht gewertet.

Vergessen Sie nicht, das Deckblatt Ihrer Lösungen zu unterschreiben.

Für die Prüfung werden insgesamt 40 Bewertungseinheiten (BE) vergeben. Zum Bestehen benötigen Sie mindestens 20 BE. Viel Erfolg !

1. Aufgabe (6 BE):

Gegeben seien die Mengen $A = \{ a, b \}$ und $B = \{ (a,b) \}$

a) Geben Sie die folgenden Mengen in Elementdarstellung an:

$A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$, Potenzmenge (A), Potenzmenge (B)

b) Ersetzen Sie in der Formel $B \,\Delta\, A \,\nabla\, A$ die Symbole Δ und ∇ durch mengentheoretische Verknüpfungssymbole, sodass sich eine wahre Aussage für die Mengen A und B ergibt!

2. Aufgabe (4 BE)

Ein Boxverein hat eine Datenbank, in der die Vereinsmitglieder abgespeichert sind. Unter anderem sind zu einer Person p die Attribute Name (n(p)), Vorname (v(p)), Größe (g(p)) und Gewicht (w(p)) vermerkt.

a) In einer Liste erscheinen alle Mitglieder derart, dass keine Person hinter einer anderen Person aufgeführt ist, deren Körpergröße und Gewicht geringer ist. Definieren Sie die zugehörige Relation $p_1 \succcurlyeq p_2$ für Personen $p_1 \succcurlyeq p_2$ mit Hilfe der oben definierten Attribute! (1 BE)

b) Handelt es sich hierbei um eine totale oder partielle Ordnungsrelation? Begründen Sie Ihre Antwort! (2 BE)

c) Da sich das Gewicht der Personen ständig ändert, wurde beschlossen, die Personen nur noch nach Körpergröße zu ordnen. Was für eine Ordnungsrelation (total / partiell) liegt jetzt vor? (keine Begründung erforderlich) (1 BE)

3. Aufgabe (5 BE)

Betrachten Sie die Schaltfunktionen-Algebra $\{ f: \{0,1\}^2 \rightarrow \{0,1\} \}$

mit $(f \oplus g)(x,y) = \max \{ f(x,y); g(x,y)\}$ und $(f \odot g)(x,y) = \min \{ f(x,y); g(x,y)\}$ und $\sim f(x,y) = 1 - f(x,y)$

Gegeben seien die beiden konkreten Funktionen f_1 und f_2 mit

$f_1(0,0) = 0$; $f_1(0,1) = 1$; $f_1(1,0) = 0$; $f_1(1,1) = 1$ und

$f_2(0,0) = 1$; $f_2(0,1) = 0$; $f_2(1,0) = 0$; $f_2(1,1) = 0$

a) Geben Sie die Funktion $f_3 = \sim f_1 \oplus \sim f_2$ an! (2 BE)

b) Demonstrieren Sie die Gültigkeit der deMorganschen Regel am Beispiel von a): Geben Sie hierfür auch die Zwischenwerte an! (3 BE)

4. Aufgabe (4 BE)

a) Konstruieren Sie eine Nachfolgerelation σ für $\mathbb{Z}$, in der alle Peano-Axiome erfüllt sind (Nachweis nicht erforderlich)! (2 BE)

b) Können Sie dasselbe auch für $\mathbb{Q}$ oder $\mathbb{R}$ erreichen? Geben Sie eine kurze Begründung für beide Mengen ab! (2 BE)

5. Aufgabe (3 BE)

a) Bestimmen Sie den ggT und das kgV von 1196 und 29670 mit Hilfe des Euklidischen Algorithmus! Geben Sie die Zwischenschritte an! (2 BE)

b) Geben Sie auch das kleinste gemeinsame Vielfache an! (1 BE)

6. Aufgabe (7 BE)

Gegeben seien die Gruppen $(\mathbb{Z}_9, +)$, $(\mathbb{Z}_9^*, *)$, $(\mathbb{Z}_6, +)$ und $(\mathbb{Z}_3 \mathrm{x} \mathbb{Z}_3, +)$

a) Geben Sie die dadurch definierten Mengen jeweils in Elementschreibweise an! (4 BE)

b) Welche dieser Gruppen sind isomorph? (es sind genau 2) Geben Sie den Isomorphismus an! (Der Nachweis, dass es sich um einen Isomorphismus handelt, ist nicht verlangt) (2 BE)

c) Zu welcher dieser Gruppen kann man eine weitere Operation definieren, sodass ein Körper entsteht? (es gibt nur eine Möglichkeit) Geben Sie an, ob man eine multiplikative oder additive Verknüpfung als weitere Operation definieren muss! (Die Angabe der Verknüpfung ist nicht verlangt) (1 BE)

7. Aufgabe (5 BE)

a) Geben Sie ein irreduzibles Polynom an, mit dem man die Multiplikationstabelle von GF (8) erzeugen kann! Weisen Sie die Irreduzibilität nach! (2 BE)

b) Betrachten Sie die Polynome $x^2 + x$ und $x + 1$ als Elemente von GF(8): Berechnen Sie das Produkt dieser Polynome mit dem in a) angegebenen irreduziblen Polynom! (3 BE)

8. Aufgabe (6 BE)

Gegeben sei der untenstehende Graph.

a) Zeichnen Sie einen minimalen spannenden Baum für diesen Graphen! (2 BE)

b) Geben Sie die (Ecken-)Färbungszahl des Graphen an und begründen Sie Ihre Antwort! (2 Begründungen: Warum ist die Zahl nicht größer und warum nicht kleiner) (2 BE)

c) Hat der Graph einen Eulerkreis, Eulerweg oder Hamiltonkreis? Begründen Sie jeweils Ihre Antwort! (2 BE)