

# Klausur Berechenbarkeit und Verifikation WS 2022/2013

## Klausurteil Berechenbarkeit und Komplexität

Iwanowski 21.02.2023

### Hinweise:

**Bearbeitungszeit:** 60 Minuten

(Richtwert innerhalb der Modulbearbeitungszeit von 120 Minuten)

**Erlaubte Hilfsmittel:** keine

Bitte notieren Sie Ihre Antworten ausschließlich auf dem Aufgabenblatt. Bei Bedarf benutzen Sie die gegenüberliegende Rückseite. Für Skizzen und Entwürfe steht ebenfalls die Rückseite zur Verfügung. Entwürfe, die nicht gewertet werden sollen, sind durchzustreichen.

Insgesamt gibt es für diesen Klausurteil 25 Bewertungseinheiten (BE) zu erzielen. Dieser Klausurteil geht zu 50% in die Modulnote ein. Sie müssen insgesamt 50% von beiden Klausuren dieses Moduls erzielen, um zu bestehen. Die einzelnen Teilklausuren müssen nicht separat bestanden werden.

Viel Erfolg!

**Aufgabe 1:** Thema: Problemdefinitionen

(2 BE)

Betrachten Sie die Funktionsgleichung  $y = 2^x$  über der Menge der **natürlichen** Zahlen.

- a) Formulieren Sie die Funktion als mengentheoretisches Berechnungsproblem B.
- b) Geben Sie das zugehörige Entscheidungsproblem E an.

**Aufgabe 2:** Thema: Berechenbarkeit

(6 BE)

Betrachten Sie die Turingmaschine  $M$  für folgendes Problem:

Das Eingabealphabet bestehe aus den Zeichen 0, 1. Das Bandalphabet enthält zusätzlich noch das Leerzeichen, welches nicht zur Eingabe gehört. Die Eingabe soll grundsätzlich nur aus einem Wort aus Eingabezeichen bestehen. Am Anfang stehe der L/S-Kopf auf dem linken Zeichen der Eingabe.

$M$  soll genau die Eingabewörter akzeptieren, welche nur<sup>1</sup> Nullen enthalten.

- a) Geben Sie eine mögliche Übergangstabelle für  $M$  an. Definieren Sie dafür eine geeignete Menge von Zuständen. (2 BE)
- b) Ist  $L(M)$  berechenbar? Begründen Sie Ihre Antwort. (1 BE)
- c) Betrachten Sie die Menge  $S$  der Gödelnummern der Turingmaschinen, welche die Wörter aus  $L(M)$  akzeptieren. Ist diese Menge berechenbar? Begründen Sie Ihre Antwort. (2 BE)
- d) Gehört die Gödelnummer von  $M$  zu  $S$ ? Begründen Sie Ihre Antwort. (1 BE)

---

<sup>1</sup> gar keine Nullen sind auch erlaubt. Es ist für die Eingabe nur verboten, dass irgendwo eine 1 vorkommt.

**Aufgabe 3:** Thema: Berechenbarkeit

(5 BE)

- a) Was ist der Unterschied zwischen rekursiv aufzählbaren und rekursiven Sprachen?  
(2 BE)
- b) Ist die Menge der rekursiv aufzählbaren Sprachen abzählbar? Begründen Sie Ihre Antwort.  
(1 BE)
- c) Nennen Sie eine nicht rekursive Sprache (bzw. Problem), die aber rekursiv aufzählbar ist, und eine nicht rekursiv aufzählbare Sprache (bzw. Problem), insgesamt also 2 Sprachen (oder Probleme). Begründen Sie das kurz: Sie dürfen sich dabei auf die Beweise berufen, die wir in der Vorlesung gezeigt haben, und müssen diese Beweise hier nicht wiederholen. Außerdem dürfen Sie die Sprachen bzw. Probleme mit einem jeweils gängigen Wort bezeichnen und müssen sie nicht exakt definieren.  
(2 BE)

**Aufgabe 4:** Thema: Komplexität

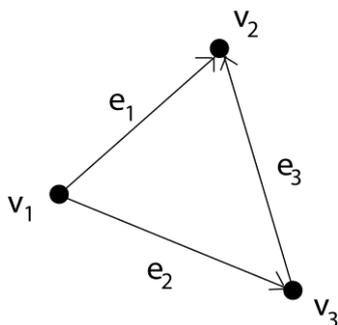
(6 BE)

Betrachten Sie die Transformation zwischen den Problemen Gerichteter Hamiltonkreis (GHK) und Hamiltonkreis (HK):

a) Welcher Sachverhalt soll dadurch bewiesen werden? Geben Sie in Ihrer Antwort an, was für diesen Beweis vorausgesetzt werden soll und was konkret gezeigt werden soll. (2 BE)

b) Für welches der beiden Probleme muss der betrachtete Graph allgemein sein, und für welches darf es ein spezieller Graph sein? (1 BE)

c) Erklären Sie den Transformationsschritt für folgenden Graphen:



Zeichnen Sie den daraus transformierten Graphen auf der rechten Seite ein und benennen Sie unten genau, welche Annahmen für den linken und rechten Graphen äquivalent zueinander sind. Äußern Sie sich auch dazu, ob die Gültigkeit dieser Annahmen hier erfüllt ist oder nicht. (3 BE)

**Aufgabe 5:** Thema: Komplexität

(4 BE)

Betrachten Sie folgendes Entscheidungsproblem  $Q_5$ :

Gegeben sei eine Menge von Waren  $\{w_1, \dots, w_n\}$ , sodass jede Ware  $w_i$  ein Gewicht und einen Wert hat. Der Wert betrage für alle Waren genau 100 EUR. Gegeben ferner eine Zahl  $g$ . Kann man eine Menge von Waren so auswählen, dass sie alle mindestens den Wert 500 EUR haben und auf einem Lastwagen mit Maximalzuladung  $g$  transportiert werden können?

- a) Ist  $Q_5$  auf einer NTM in polynomialer Zeit berechenbar? Begründen Sie Ihre Antwort. (2 BE)
- b) Zu welcher Komplexitätsklasse gehört  $Q_5$  genau? Begründen Sie Ihre Antwort. (2 BE)

**Aufgabe 6:** Thema: Komplexität

(2 BE)

Betrachten Sie folgendes Entscheidungsproblem  $Q_6$ :

Gegeben sei ein Graph  $G$  und eine Schranke  $k$ . Falls  $G$  keine einzige Teilmenge  $T$  von genau  $k$  Ecken enthält, sodass keine zwei Ecken von  $T$  durch eine Kante verbunden sind, soll die Antwort zu  $Q_6$  Ja sein, anderenfalls Nein.

Geben Sie die Komplexitätsklasse von  $Q_6$  an und begründen Sie Ihre Antwort. Hierbei dürfen Sie sich auf die Klassenzugehörigkeit von bekannten Problemen aus der Komplexitätstheorie berufen.