Klausur Berechenbarkeit und Verifikation WS 2021/2022

Klausurteil Berechenbarkeit und Komplexität

Prof. Dr. Sebastian Iwanowski 22.02.2022

<u>Hinweise:</u>

Bearbeitungszeit: 60 Minuten

Erlaubte Hilfsmittel: keine

Bitte notieren Sie Ihre Antworten ausschließlich auf dem Aufgabenblatt. Bei Bedarf benutzen Sie die Rückseite. Für Skizzen und Entwürfe steht ebenfalls die Rückseite zur Verfügung. Entwürfe, die nicht gewertet werden sollen, sind durchzustreichen.

Insgesamt gibt es für diesen Klausurteil 30 Bewertungseinheiten (BE) zu erzielen. Dieser Klausurteil geht zu 50% in die Modulnote ein. Sie müssen insgesamt 50% von beiden Klausuren dieses Moduls erzielen, um zu bestehen. Die einzelnen Teilklausuren müssen nicht separat bestanden werden.

Viel Erfolg!

Aufgabe 1: Thema: Berechenbarkeit und Nichtberechenbarkeit (5 BE)

Ein Palindrom ist ein Wort, das rückwärts gelesen dasselbe ist wie vorwärts. Das heutige Datum ist ein Palindrom: 22.02.2022.

Betrachten Sie das Problem, zu einem gegebenen Datum $t_1t_2.m_1m_2.j_1j_2j_3j_4$ zu erkennen, ob es ein Palindrom ist. Die Gültigkeit des Datums soll nicht zum Problem gehören, d.h. auch ungültige Daten wie der 65.25.2556 sind in diesem Problem zugelassen.

a) Definieren Sie das Problem formal als Menge von Wörtern über einem Alphabet, indem Sie ein Datum mit den oben angegebenen Variablen als Oktupel $(t_1,t_2,m_1,m_2,j_1,j_2,j_3,j_4)$ bezeichnen. Es ist nicht erforderlich zu unterscheiden, welcher Teil der zu definierenden Objekte das Beispiel und welcher die Lösung ist. (2 BE)

b) Ist das Problem berechenbar? Begründen Sie Ihre Antwort. (1,5 BE)

c) Ein Professor stellt in einer Klausur die Aufgabe, für dieses Problem eine Turingmaschine zu bauen. Er will sich für das Korrigieren Arbeit ersparen und einen Automaten bauen, der eine gegebene Studierendenlösung daraufhin überprüft, ob sie korrekt Palindrome erkennt. Wird er damit erfolgreich sein? Begründen Sie Ihre Antwort. (1,5 BE)

Aufgabe 2: Thema: Berechenbarkeit und Nichtberechenbarkeit (7 BE)

Betrachten Sie folgende Entscheidungs-Turingmaschine T auf dem Alphabet {0,1}:

	q_0	q_1	q_2
0	$(0, q_1, R)$	$(0, q_1, R)$	q_N
1	$(0, q_1, R)$	$(0, q_2, L)$	q_Y
blank	$(0, q_1, R)$	$(0, q_2, L)$	q_Y

a) Beschreiben Sie in Worten, was T macht und welchen Endzustand T in Abhängigkeit von der Eingabe erreicht. (2 BE)

b) Geben Sie die Sprache L(T) an. (1 BE)

c) Geben Sie eine Eigenschaft S an, sodass T die folgende Sprache akzeptiert:
L_S = { <M> | M ist eine Turingmaschine und L(M) $\in$ S}. (1 BE)

d) Ist die Sprache L_S mit der Eigenschaft S aus c) entscheidbar? Begründen Sie Ihre Antwort. (1,5 BE)

e) Ist die folgende Sprache L_T entscheidbar?
L_T = { <M> | M ist eine Turingmaschine und L(M) = L(T)}
Begründen Sie Ihre Antwort. (1,5 BE)

Aufgabe 3: Thema: Komplexität (5 BE)

Betrachten Sie das Entscheidungsproblem FACTOR:
Gegeben eine Zahl n und eine Schranke k. Hat n einen nichttrivialen Teiler ≤ k?

Das Problem FACTOR konnte bisher nicht auf einer DTM polynomiell gelöst werden. Genau so wenig konnte die NP-Vollständigkeit bewiesen werden.

a) Geben Sie einen nichtdeterministischen Algorithmus in Worten an, der dieses Problem in polynomieller Zeit löst. (1 BE)

b) Skizzieren Sie in Worten, wie man deterministisch mit einer polynomiellen Lösung von FACTOR auch das Berechnungsproblem, zu n die Primfaktorisierung zu finden, in polynomieller Zeit lösen kann. Sie müssen keine genauen Laufzeiten nennen. (2 BE)

c) Nennen Sie die Konsequenz für die P vs. NP-Frage, wenn jemand einen polynomiellen Algorithmus für FACTOR auf einer DTM findet. (1 BE)

d) Nennen Sie die Konsequenz für die P vs. NP-Frage, wenn jemand beweist, dass dieses Problem auf einer DTM nicht polynomiell lösbar ist. (1 BE)

.

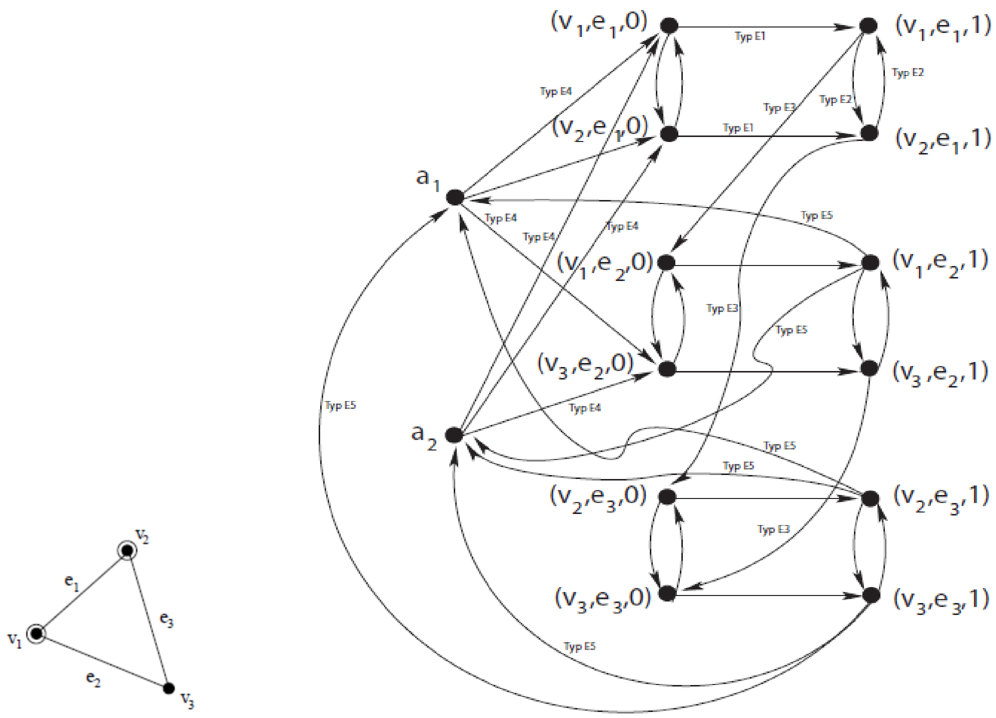
Aufgabe 4: Thema: Komplexität (6 BE)

Betrachten Sie die Transformation zwischen den Problemen VERTEX COVER (VC) und Gerichteter Hamiltonkreis (GHK):

a) Welcher Sachverhalt soll dadurch bewiesen werden? Geben Sie dafür an, was für diesen Beweis vorausgesetzt werden soll und was dadurch gezeigt werden soll. (1 BE)

b) Für welches der beiden Probleme muss der betrachtete Graph allgemein sein, und für welches darf es ein spezieller Graph sein? (1 BE)

c) Betrachten Sie den Transformationsschritt für folgendes Graphenpaar:



Benennen Sie, was im linken Graphen und im rechten Graphen angenommen wird und zeichnen Sie diese Annahme im rechten Graphen ein. (4 BE)

Aufgabe 5: Thema: Komplexität (7 BE)

Nehmen Sie an, dass co-NP=NP gilt, dass aber **nicht** P=NP gilt.

a) Beschreiben Sie das **Entscheidungs**problem Traveling Salesman (TSP) in Worten. (1 BE)

b) Was gilt unter der oben genannten Annahme für die Laufzeit eines deterministischen Algorithmus für das Problem TSP? Begründen Sie Ihre Antwort. (1 BE)

c) Beschreiben Sie die Probleme SAT und $\overline{\text{SAT}}$ in Worten. (2 BE)

d) Was wissen Sie unter der oben genannten Annahme über die Zugehörigkeit von SAT und $\overline{\text{SAT}}$ zu den Komplexitätsklassen P und NP? Äußern Sie sich zu beiden Klassen für beide Probleme. Begründen Sie Ihre Antwort. (3 BE)

.