Klausur Berechenbarkeit und Verifikation WS 2020/2021

Klausurteil Berechenbarkeit und Komplexität

Prof. Dr. Sebastian Iwanowski 09.03.2021

Hinweise:

Bearbeitungszeit: 60 Minuten

Erlaubte Hilfsmittel: keine

Bitte notieren Sie Ihre Antworten ausschließlich auf dem Aufgabenblatt. Bei Bedarf benutzen Sie die Rückseite. Für Skizzen und Entwürfe steht ebenfalls die Rückseite zur Verfügung. Entwürfe, die nicht gewertet werden sollen, sind durchzustreichen.

Insgesamt gibt es für diesen Klausurteil 22 Bewertungseinheiten (BE) zu erzielen. Dieser Klausurteil geht zu 50% in die Modulnote ein. Sie müssen insgesamt 50% von beiden Klausuren dieses Moduls erzielen, um zu bestehen. Die einzelnen Teilklausuren müssen nicht separat bestanden werden.

Viel Erfolg!

Aufgabe 1: Thema: Grundbegriffe der Berechenbarkeit (2 BE)

Welche mathematische Struktur hat ein Problem?

Als Antwort stehen Ihnen folgende Begriffe zur Auswahl:

Menge, Funktion, Tupel, Relation, Sprache.

Entscheiden Sie sich jeweils für genau eine Struktur (auch wenn mehrere möglich sein sollten) und begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 2: Thema: Berechenbarkeit und Nichtberechenbarkeit (6 BE)

Betrachten Sie die Turingmaschine M für folgendes Problem:

Das Eingabealphabet bestehe aus den Zeichen 0, 1. Das Bandalphabet enthält zusätzlich noch das Leerzeichen.

M soll genau die Eingabewörter akzeptieren, die aus einer abwechselnden Folge von 0 und 1 bestehen und auch gleich viele Nullen und Einsen enthalten, also z.B. 010101 oder 10101010.

a) Geben Sie eine mögliche Übergangstabelle für M an. Definieren Sie dafür eine geeignete Menge von Zuständen. (3 BE)

b) Ist L(M) berechenbar? Begründen Sie Ihre Antwort. (1 BE)

c) Definieren Sie mit Hilfe von L(M) und dem Satz von Rice eine Sprache, die nicht berechenbar ist. Sie können das in Worten tun oder auch die Sprache formal aufschreiben.
<u>Wichtig:</u> Sie dürfen nicht irgendeine Definition einer nicht berechenbaren Sprache angeben, sondern L(M) soll in Ihrer Definition explizit verwendet werden. (2 BE)

Aufgabe 3: Thema: Komplexität (6 BE)

a) Definieren Sie das Problem TSP (Traveling Salesman) als Optimierungsproblem. (1BE)

b) Definieren Sie das Problem TSP als Entscheidungsproblem. (1 BE)

c) Für welches Problem ist die NP-Vollständigkeit bewiesen worden? (1 BE)

d) Um auch für das andere Problem zu zeigen, dass es schwer ist, muss es eine Transformation geben, die man auf einer deterministischen Turingmaschine in polynomieller Laufzeit durchführen kann. Skizzieren Sie in Worten, von welchem Problem auf welches Problem man diese Transformation durchführen muss und wie diese Transformation in diesem speziellen Falle konkret vorgeht. (3 BE)

.

Aufgabe 4: Thema: Komplexität (4 BE)

Betrachten Sie das Problem CLIQUE:
Gegeben ein Graph G und eine Zahl k. Gibt es eine Menge aus k Ecken von G, sodass all diese Ecken in G miteinander durch eine Kante direkt verbunden sind?

a) Geben Sie an, wie man auf einer NTM die Lösbarkeit von CLIQUE bestimmen kann. (1 BE)

b) Welches NP-vollständige Problem, kann man leicht in CLIQUE überführen und so beweisen, dass CLIQUE auch NP-vollständig ist?
Spezifizieren Sie das Problem in ähnlicher Weise, wie CLIQUE oben spezifiziert ist (nicht nur den Namen nennen!) und geben Sie die Transformation an. (3 BE)

.

Aufgabe 5: Thema: Komplexität (4 BE)

Betrachten Sie den co-NP-Satz: $(\exists\ L \in NPV: \overline{L} \in NP) \Leftrightarrow$ co-NP = NP .

a) Beweisen Sie eine Richtung dieser Äquivalenz (Tipp: Nehmen Sie die einfachere!). (2 BE)

b) Wenn co-NP ≠ NP gülte, warum ist dann die Jahrhundertfrage „Ist P = NP?“ gelöst? Stellen Sie erst einmal fest, wie diese Frage dann beantwortet werden würde und beweisen Sie das.
Tipp: Benutzen Sie Kontraposition. Den co-NP-Satz brauchen Sie dafür nicht! (2 BE)

.