Klausur Berechenbarkeit und Verifikation WS 2018/2019

Klausurteil Berechenbarkeit und Komplexität

Iwanowski 27.02.2019

Hinweise:

Bearbeitungszeit: 60 Minuten

Erlaubte Hilfsmittel: keine

Bitte notieren Sie Ihre Antworten ausschließlich auf dem Aufgabenblatt. Bei Bedarf benutzen Sie die Rückseite. Für Skizzen und Entwürfe steht ebenfalls die Rückseite zur Verfügung. Entwürfe, die nicht gewertet werden sollen, sind durchzustreichen.

Insgesamt gibt es für diesen Klausurteil 30 Bewertungseinheiten (BE) zu erzielen. Dieser Klausurteil geht zu 50% in die Modulnote ein. Sie müssen insgesamt 50% von beiden Klausuren dieses Moduls erzielen, um zu bestehen. Die einzelnen Teilklausuren müssen nicht separat bestanden werden.

Viel Erfolg!

Aufgabe 1: Thema: Definition eines Problems (7 BE)

a) Definieren Sie die Problemstellung, zu einer gegebenen natürlichen Zahl einen echten Teiler zu finden, formal über die mengentheoretische Formulierung mit Hilfe eines Prädikats. (2 BE)

b) Geben Sie ein Beispiel zu der Problemstellung aus a) mit einer zugehörigen Lösung an. (1 BE)

c) Formulieren Sie ein dazugehöriges Entscheidungsproblem (muss nicht so formal wie in a) sein, geht auch in Worten). (1 BE)

d) Ist die Problemstellung aus a) entscheidbar? Begründen Sie Ihre Antwort. (1 BE)

e) Was können Sie über den derzeitigen Kenntnisstand in der Wissenschaft sagen, ob die Problemstellung aus a) effizient lösbar ist? Begründen Sie das mit Hilfe eines analogen Problems. (1 BE)

f) Wie sieht Frage e) bezüglich des in c) formulierten Entscheidungsproblems aus? (1 BE)

Aufgabe 2: Thema: Berechenbarkeit und Nichtberechenbarkeit (6 BE)

Betrachten Sie die Turingmaschine M für folgendes Problem:

Das Eingabealphabet bestehe aus den Zeichen 0, 1. Das Bandalphabet enthält zusätzlich noch das Leerzeichen.

M soll genau die Eingabewörter akzeptieren, die aus genau 3 Zeichen bestehen.

a) Geben Sie eine mögliche Übergangstabelle für M an. Definieren Sie dafür eine geeignete Menge von Zuständen. (4 BE)

b) Betrachten Sie die Menge der Sprachen, welche L(M) als Teilmenge enthalten. Ist diese Menge berechenbar? Begründen Sie Ihre Antwort. (2 BE)

Aufgabe 3: Thema: Berechenbarkeit und Nichtberechenbarkeit (4 BE)

Betrachten Sie die Definition einer Gödelnummer:

a) Zu welchem Konzept der Berechenbarkeit gibt es eine funktionale Beziehung der Gödelnummer? (1 BE)

b) Wer ist das Argument und wer der Funktionswert der Beziehung aus a)? Ist das egal, oder gilt das nur in eine Richtung? Begründen Sie Ihre Antwort. (1 BE)

c) Erläutern Sie, warum die Definition der Gödelnummer entscheidend ist für einen relativ einfachen Beweis für die Tatsache, dass es Probleme geben muss, die nicht berechenbar sind. (2 BE)

Aufgabe 4: Thema: Grundlagen der Komplexitätstheorie (4 BE)

Betrachten Sie die Konzepte DTM (deterministische Turingmaschine) und NTM (nichtdeterministische Turingmaschine):

a) Was ist der entscheidende Unterschied zwischen einer DTM und einer NTM? Benutzen Sie in Ihrer Antwort nicht das Konzept des „Ratens“. (1 BE)

b) Welche Teilmengenbeziehung besteht zwischen der Menge aller DTMs und der Menge aller NTMs? Begründen Sie Ihre Antwort. (1 BE)

c) Was ist der Grund, warum man das Konzept der NP-Vollständigkeit definiert, und in welchen Fällen versucht man die NP-Vollständigkeit eines Problems nachzuweisen? (1 BE)

d) Definieren Sie in Worten das einzige Problem, für das man die NP-Vollständigkeit direkt nachgewiesen hat? (1 BE)

Aufgabe 5: Thema: NP-Vollständigkeit (5 BE)

Betrachten Sie die Probleme Vertex Cover (VC) und Independent Set (IS) für Graphen.

a) Formulieren Sie die genaue Problemstellung beider Probleme in Worten. (2 BE)

b) Wenn bereits gezeigt wurde, dass VC NP-vollständig ist und dass IS in NP liegt, was muss gezeigt werden, damit auch die NP-Vollständigkeit von IS bewiesen ist? (1 BE)

c) Skizzieren Sie den Beweis von b). (2 BE)

Aufgabe 6: Thema: Komplexitätsklassen (4 BE)

Angenommen, es beweist jemand, dass die Errechnung einer Gewinnstrategie für Schach eine exponentielle untere Schranke in der Größe des Spielfeldes und der Anzahl der beteiligten Figuren hat.

a) Wenn jemand zusätzlich beweist, dass die Errechnung einer Gewinnstrategie für Schach auf einer NTM in polynomieller Zeit erfolgen kann, was können Sie dann über allgemein bekannte Komplexitätsklassen sagen? (1 BE)

b) Folgt aus a), dass die Errechnung der Gewinnstrategie NP-vollständig ist? Begründen Sie Ihre Antwort. (1 BE)

c) Wenn die Errechnung der Gewinnstrategie NP-vollständig ist (wegen b) oder weil das jemand zusätzlich gezeigt hat) und wenn dann noch jemand zeigt, dass die Errechnung einer Strategie, die **nicht** zum Gewinn führt, auf einer NTM in polynomieller Zeit erfolgen kann, was können Sie dann über allgemein bekannte Komplexitätsklassen sagen? (1 BE)
Tipp: Hier müssen Sie mindestens eine andere Klasse als in a) erwähnen.

d) Was gilt für das Problem Vertex Cover, wenn a) gilt? (1 BE)