Klausur Berechenbarkeit und Verifikation WS 2017/2018

Klausurteil Berechenbarkeit und Komplexität

Iwanowski 06.02.2018

Hinweise:

Bearbeitungszeit: 60 Minuten

Erlaubte Hilfsmittel: keine

Bitte notieren Sie Ihre Antworten ausschließlich auf dem Aufgabenblatt. Bei Bedarf benutzen Sie die Rückseite. Für Skizzen und Entwürfe steht ebenfalls die Rückseite zur Verfügung. Entwürfe, die nicht gewertet werden sollen, sind durchzustreichen.

Insgesamt gibt es für diesen Klausurteil 30 Bewertungseinheiten (BE) zu erzielen. Dieser Klausurteil geht zu 50% in die Modulnote ein. Sie müssen insgesamt 50% von beiden Klausuren dieses Moduls erzielen, um zu bestehen. Die einzelnen Teilklausuren müssen nicht separat bestanden werden.

Viel Erfolg!

Aufgabe 1: Thema: Probleme und Algorithmen (7 BE)

Betrachten Sie das Entscheidungsproblem Travelling Salesman:

a) Formulieren Sie dieses Problem exakt als Relation auf einer Menge.
Das einschränkende Prädikat können Sie in Worten beschreiben. (2 BE)

b) Ist dieses Problem in NP? Begründen Sie Ihre Antwort! (2 BE)

c) Ist dieses Problem berechenbar? Begründen Sie Ihre Antwort! (1 BE)

d) Warum ist es für eine große Klasse von Problemen relevant zu wissen, ob genau dieses Problem auf einer deterministischen Turingmaschine in polynomieller Zeit lösbar ist?
Wie ist der gegenwärtige Stand der wissenschaftlichen Erkenntnis dazu? (2 BE)

Aufgabe 2: Thema: Berechenbarkeit und Nichtberechenbarkeit (7 BE)

Betrachten Sie die Sprache L = {0, 1, 2} aus dem Eingabealphabet {0, 1, 2}

M soll eine DTM sein, welche genau die Wörter aus M akzeptiert, d.h. L ist die von M erkannte Sprache.

a) Geben Sie eine mögliche Übergangstabelle für M an. Am Anfang soll der L/S-Kopf im Zustand q_0 auf dem linkesten Zeichen der Eingabe stehen, und zusätzlich zum Eingabealphabet gibt es noch das Leerzeichen im Bandalphabet. (4 BE)

b) Ist die Sprache L oder das Komplement von L berechenbar? Begründen Sie Ihre Antwort für beide Sprachen. (2 BE)

c) Geben Sie ein Beispielwort für das obige Eingabealphabet an, das zum Komplement von L gehört. (1 BE)

Aufgabe 3: Thema: Berechenbarkeit und Nichtberechenbarkeit (6 BE)

a) Betrachten Sie die Menge A der Gödelnummern der Turingmaschinen, welche nicht die leere Menge in ihrer Sprache haben. Ist diese Menge berechenbar? Begründen Sie Ihre Antwort. (2 BE)

b) Betrachten Sie die Menge B der Gödelnummern der Turingmaschinen, welche eine nichtleere Sprache haben. Ist diese Menge berechenbar? Begründen Sie Ihre Antwort. (1 BE)

c) Betrachten Sie die Menge C der Gödelnummern der Turingmaschinen, welche eine Sprache haben, die aus 2n+1 verschiedenen einelementigen Wörtern aus einem n-elementigen Eingabealphabet bestehen. Ist diese Menge berechenbar? Begründen Sie Ihre Antwort. (1 BE)

d) Gehört die Gödelnummer von M aus Aufgabe 2 zu A, B oder C? Begründen Sie für alle 3 Mengen Ihre Antwort. (2 BE)

Aufgabe 4: Thema: Theorie der NP-Vollständigkeit (3 BE)

Angenommen, Sie haben eine nichtdeterministische Turingmaschine N gefunden, die folgendes Entscheidungsproblem in polynomialer Zeit löst:

Gegeben ein bewerteter Graph G und eine Zahl L. Ist es richtig, dass es **k**eine Rundreise gibt, welche alle Knoten mindestens einmal durchläuft und welche eine Länge kleiner oder gleich L hat?

a) Was können Sie dann über die Klasse NP sagen? Begründen Sie Ihre Antwort. (2 BE)

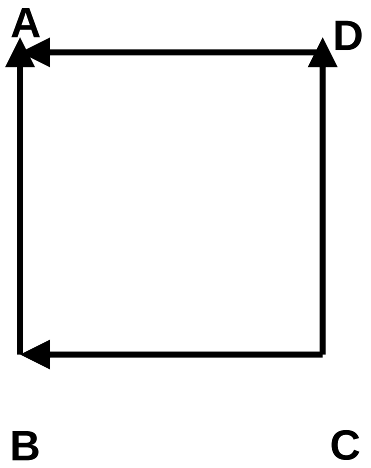
b) Welche Aussage können Sie dann darüber treffen, ob das Entscheidungsproblem oben auch auf einer deterministischen Turingmaschine polynomiell lösbar ist? Begründen Sie Ihre Antwort, indem Sie einen Satz angeben, der Ihre Aussage rechtfertigt bzw. einen Satz, der trotz Verwendung ähnlicher Sachverhalte nicht anwendbar ist, wenn Sie keine Aussage treffen können. (1 BE)

Aufgabe 5: Thema: Theorie der NP-Vollständigkeit (4 BE)

Setzen Sie voraus, dass das Problem Gerichteter Hamiltonkreis (GHK) bereits als NP-vollständig bewiesen wurde. Sie sollen jetzt die NP-Vollständigkeit des Problems Hamiltonkreis (HK) zeigen.

a) Formulieren Sie in Worten, was zu zeigen ist. (2 BE)

b) Führen Sie die benötigte Transformation an folgender Eingabe durch: (2 BE)



Aufgabe 6: Thema: Theorie der NP-Vollständigkeit (3 BE)

Betrachten Sie folgendes Entscheidungsproblem P:

Gegeben sei eine Menge von Waren $\{w_1, ..., w_n\}$, sodass jede Ware w_i ein Gewicht, einen Wert und eine Farbe hat. Gegeben ferner Zahlen g und v. Kann man eine Menge von Waren so auswählen, dass sie alle dieselbe Farbe haben, zusammen mindestens den Wert v haben und auf einem Lastwagen mit Maximalzuladung g transportiert werden können?

a) Formulieren Sie ein ähnliches Problem und geben Sie dessen Komplexitätsklasse an. (2 BE)

b) Benutzen Sie a), um die Komplexitätsklasse von P zu bestimmen und begründen Sie Ihre Antwort mit der Angabe des allgemeinen Prinzips, das Sie hier durchgeführt haben. (1 BE)

.