

# Klausur Berechenbarkeit und Verifikation WS 2016/2017

## Klausurteil Berechenbarkeit und Komplexität

Iwanowski 26.01.2017

### Hinweise:

**Bearbeitungszeit:** 60 Minuten

**Erlaubte Hilfsmittel:** keine

Bitte notieren Sie Ihre Antworten ausschließlich auf dem Aufgabenblatt. Bei Bedarf benutzen Sie die Rückseite. Für Skizzen und Entwürfe steht ebenfalls die Rückseite zur Verfügung. Entwürfe, die nicht gewertet werden sollen, sind durchzustreichen.

Insgesamt gibt es für diesen Klausurteil 30 Bewertungseinheiten (BE) zu erzielen. Dieser Klausurteil geht zu 50% in die Modulnote ein. Sie müssen insgesamt 50% von beiden Klausuren dieses Moduls erzielen, um zu bestehen. Die einzelnen Teilklausuren müssen nicht separat bestanden werden.

Viel Erfolg!

**Aufgabe 1:** Thema: Probleme und Algorithmen

(4 BE)

Betrachten Sie die Funktionsgleichung  $y = x^2$  über der Menge der reellen Zahlen.

- a) Formulieren Sie die Funktion als mengentheoretisches Berechnungsproblem. (1 BE)
- b) Geben Sie ein Beispiel für dieses Problem und die Lösung dafür an. (1 BE)
- c) Geben Sie das zugehörige Entscheidungsproblem an. (2 BE)

Betrachten Sie die Turingmaschine  $M$  für folgendes Problem:

Das Eingabealphabet bestehe aus den Zeichen 0, 1. Das Bandalphabet enthält zusätzlich noch das Leerzeichen, welches nicht zur Eingabe gehört. Die Eingabe soll grundsätzlich nur aus einem Wort aus Eingabezeichen bestehen. Am Anfang stehe der L/S-Kopf auf dem linken Zeichen der Eingabe.

$M$  soll genau die Eingabewörter akzeptieren, welche mindestens eine 1 enthalten.

- a) Geben Sie eine mögliche Übergangstabelle für  $M$  an. Definieren Sie dafür eine geeignete Menge von Zuständen und kommentieren Sie diese jeweils mit einem oder mehreren Worten. (4 BE)
- b) Ist  $L(M)$  berechenbar? Begründen Sie Ihre Antwort. (1 BE)
- c) Betrachten Sie die Menge  $S$  der Gödelnummern der Turingmaschinen, welche die Wörter aus  $L(M)$  akzeptieren. Ist diese Menge berechenbar? Begründen Sie Ihre Antwort. (2 BE)
- d) Gehört die Gödelnummer von  $M$  zu  $S$ ? Begründen Sie Ihre Antwort. (1 BE)

**Aufgabe 3:** Thema: Berechenbarkeit und Nichtberechenbarkeit

(6 BE)

- a) Skizzieren Sie den Beweis, dass die Menge aller Algorithmen abzählbar ist. (3 BE)
- b) Was ist der Unterschied zwischen rekursiv aufzählbaren und rekursiven Sprachen? (2 BE)
- c) Ist die Menge der rekursiv aufzählbaren Sprachen abzählbar? Begründen Sie Ihre Antwort. (1 BE)

**Aufgabe 4:** Thema: Theorie der NP-Vollständigkeit

(6 BE)

Betrachten Sie die Formel

$$F = (x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_2 \vee \neg x_3)$$

für die booleschen Variablen  $x_1$ ,  $x_2$  und  $x_3$

- a) Geben Sie den Transformationsgraphen  $G$  an, der bei der Transformation von 3SAT auf VERTEX COVER für diese Formel entsteht. (3 BE)
- b) Formulieren Sie die beiden Fragestellungen für Formel  $F$  und Graph  $G$ , welche bei der Transformation von a) äquivalent sind. (2 BE)
- c) Geben Sie die Antwort auf die Frage von b) und begründen Sie Ihre Antwort. (1 BE)

Betrachten Sie folgendes Entscheidungsproblem P:

Gegeben sei ein Graph  $G$ , dessen Knoten mit natürlichen Kostenzahlen bewertet sind, sowie eine natürliche Zahl  $c$ . Gibt es eine Menge aus Knoten, welche alle Kanten überdecken und deren Gesamtkostenzahl kleiner gleich  $c$  ist?

- a) Ist das Problem auf einer NTM in polynomialer Zeit berechenbar? Begründen Sie Ihre Antwort. (2 BE)
- b) Zu welcher Komplexitätsklasse gehört dieses Problem genau? Begründen Sie Ihre Antwort, indem Sie eine geeignete Rückführung auf ein Problem angeben, dessen Komplexitätsklasse in der Vorlesung gezeigt wurde. (2 BE)

**Aufgabe 6:** Thema: Theorie der NP-Vollständigkeit

(2 BE)

Betrachten Sie folgendes Entscheidungsproblem P:

Gegeben sei ein Graph  $G$ . Enthält dieser Kreis **keinen** Kreis, der alle Knoten des Graphen genau einmal durchläuft und dabei nur Kanten aus  $G$  benutzt?

Geben Sie die Komplexitätsklasse dieses Problems an und begründen Sie Ihre Antwort.