

Klausur Algorithmik SS 2015

Iwanowski 02.09.2015

Hinweise:

Bearbeitungszeit: 120 Minuten

Erlaubte Hilfsmittel: keine

Bitte notieren Sie Ihre Antworten ausschließlich auf dem Aufgabenblatt! Bei Bedarf benutzen Sie die gegenüberliegende Rückseite! Für Skizzen und Entwürfe steht ebenfalls die Rückseite zur Verfügung. Entwürfe, die nicht gewertet werden sollen, sind durchzustreichen.

Insgesamt gibt es 50 Bewertungseinheiten (BE) zu erzielen. Zum Bestehen benötigen Sie mindestens 25 BE.

Viel Erfolg!

Aufgabe 1: Thema: Einführung in die formale Behandlung von Algorithmen (5 BE)

Beweisen Sie, dass Mergesort ein Laufzeitverhalten von $O(n \log n)$ im schlechtesten Fall hat, indem Sie

- a) die Rekursionsgleichung aufstellen (1 BE)
- b) die zu zeigende nicht rekursive Ungleichung angeben (1 BE)
- c) die Ungleichung aus ii) mit vollständiger Induktion beweisen. (3 BE)

Aufgabe 2: Thema: Einführung in die formale Behandlung von Algorithmen

(2 BE)

Gegeben sei ein Algorithmus A mit Laufzeit $T(n)$ für n Eingabeelemente.

Man kann Folgendes zeigen: $\forall c \geq 3 \forall n \in \mathbb{N} : T(n) \leq c \cdot n \Rightarrow T(n+1) \leq c \cdot (n+1)$.

Eine Induktionsverankerung wurde nicht gemacht. Für 1 Eingabeelement braucht der Algorithmus 10 elementare Rechenschritte.

Ihre Aufgabe: Argumentieren Sie, warum es sich um einen $O(n)$ -Algorithmus handelt, indem Sie konkret eine Abschätzung angeben, die für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt .

Aufgabe 3: Thema: Such- und Sortieralgorithmen

(4 BE)

Skizzieren Sie, wie man durch eine geschickte Wahl des Pivotelements erreicht, dass Quicksort auch im schlechtesten Fall eine Laufzeit in $O(n \log n)$ hat.

Geben Sie eine Begründung für die Gültigkeit der Laufzeit ab. Dafür reicht die Angabe der Rekursionsgleichung.

Aufgabe 4: Thema: Such- und Sortieralgorithmen

(6 BE)

- a) Welche Bedingung muss die Eingabe erfüllen, damit Bucketsort funktioniert? Unter welcher Bedingung ist Bucketsort linear im Durchschnitt? (2 BE)
- b) Skizzieren Sie, wie man n beliebige natürliche Zahlen mittels Bucketsort sortieren könnte. (2 BE)
- c) Wann und unter welcher Betrachtungsweise liefert Bucketsort im Fall b) einen Vorteil gegenüber Mergesort. Wann ist Bucketsort auf jeden Fall im Nachteil? (2 BE)
Hinweis: Hier sollten Sie sich sowohl zum schlechtesten Fall als auch zum Durchschnittsverhalten äußern.

Aufgabe 5: Thema: Wörterbuchproblem

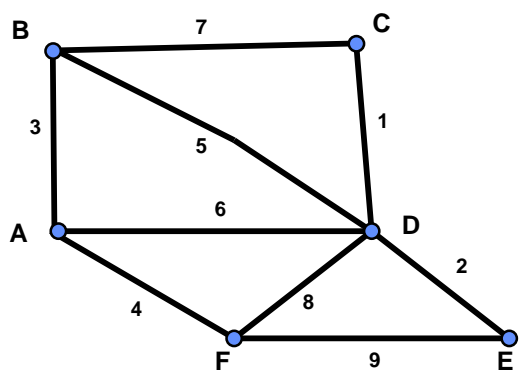
(6 BE)

Begründen Sie mit Hilfe der Baumstruktur, warum die Laufzeit der 3 Wörterbuchaufgaben in $(2,4)$ -Bäumen $\Theta(\log n)$ ist. Beweisen Sie Ihre Aussagen zur Baumstruktur im Detail und nennen Sie die Eigenschaft, welche die 3 Algorithmen haben müssen, damit es ausreicht, ausschließlich diese Baumstruktur zu betrachten.

Aufgabe 6: Thema: Graphenalgorithmen

(6 BE)

Führen Sie im unten angegebenen Graphen den Algorithmus von Kruskal durch und stellen Sie nach jeder hinzugefügten Kante die neue Union-Find-Struktur dar.



Betrachten Sie den Algorithmus von Floyd-Warshall (siehe unten):

Ist dieser Algorithmus besser als der wiederholte Einsatz von Dijkstra? Unterscheiden Sie den allgemeinen Fall und den in vielen Praxisanwendungen normalen Fall und begründen Sie jeweils Ihre Antwort.

```
1: for  $i = 1, \dots, n$  do
2:   for  $j = 1, \dots, n$  do
3:      $d_{ij}^{(0)} = \begin{cases} c(i, j): & \text{falls } (i, j) \in E \\ \infty: & \text{sonst} \end{cases}$ 
4:   end for
5: end for
6: for  $k = 1, \dots, n$  do
7:   for  $i = 1, \dots, n$  do
8:     for  $j = 1, \dots, n$  do
9:        $d_{ij}^{(k)} = \min(d_{ij}^{(k-1)}, d_{ik}^{(k-1)} + d_{kj}^{(k-1)})$ 
10:    end for
11:  end for
12: end for
```


Aufgabe 8: Thema: Graphenalgorithmen

(7 BE)

Gegeben sei ein Graph mit Quelle q , Senke s , Kantenkapazitäten für Flüsse.

Gegeben Sei ferner ein dafür zulässiger Fluss f von q nach s .

- a) Definieren Sie die Begriffe Erweiterungsweg, Schnitt und Schnittkapazität. (3 BE)
- b) Geben Sie den Zusammenhang zwischen der Existenz eines Erweiterungswegs, der Schnittkapazität und der Flusskapazität an. (3 BE)
- c) Begründen Sie eine der Implikationen aus b) genauer. (1 BE)

Aufgabe 9: Thema: String Matching

(4 BE)

a) Berechnen Sie die Präfixfunktion für den Knuth-Morris-Pratt-Algorithmus für folgendes Eingabemuster: (2 BE)

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
a	b	b	a	b	b	b	a	b	b	a	b	b	a	b	b	b	a	b	b	a	b	b	b

b) Der Algorithmus von Knuth-Morris-Pratt hat 2 ineinander geschachtelte Schleifen, die beide alleine $O(n)$ Durchläufe haben können. Schildern Sie das Prinzip, wie erreicht wird, dass die Gesamtlaufzeit ebenfalls bei $O(n)$ bleibt und nicht, wie im schlimmsten Fall zu erwarten $O(n^2)$. (2 BE)

Aufgabe 10: Thema: Algorithmische Geometrie

(6 BE)

Gegeben seien n Referenzpunkte in der Ebene. Suchen Sie drei Punkte, deren Umkreis keinen anderen Referenzpunkt enthält. Ziel ist es, irgendeinen derartigen Umkreis zu finden (nicht notwendig den größten).

a) Lösen Sie dieses Problem mit einem trivialen Algorithmus: Beschreiben Sie diesen in Worten. Was ist die Laufzeit? (3 BE)

b) Gehen Sie davon aus, dass ein Voronoidiagramm für die Referenzpunkte bereits vorliegt. Wie kann man das Problem jetzt lösen, und was ist jetzt die Laufzeit, nachdem das Voronoi-Diagramm bereits berechnet wurde? (3 BE)