

Grundlagen der Theoretischen Informatik

Sebastian Iwanowski
FH Wedel

Kap. 2: Logik, Teil 2.1: Aussagenlogik

Aussagenlogik

Wdh.: Operatoren zwischen Aussagen

Durch Operatoren werden
aus alten Aussagen
neue Aussagen geschaffen:

Einstelliger Operator:

- Negation (\neg)

Zweistellige Operatoren:

- Konjunktion (\wedge)
- Disjunktion (\vee)
- Implikation (\rightarrow)
- Äquivalenz (\leftrightarrow)

Wahrheitswerte für die neuen Aussagen:

p	q	$\neg p$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$
w	w	f	w	w	w	w
w	f	f	f	w	f	f
f	w	w	f	w	w	f
f	f	w	f	f	w	w

Aussagenlogik

Achtung: Warum einfach, wenn es auch kompliziert geht ?

Folgende Notationen sind in der Literatur ebenfalls gebräuchlich:

für logische Schlussregeln: $\frac{p, q}{r}$ ist dasselbe wie $p \wedge q \Rightarrow r$

In der Logik benutzt man unterschiedliche Symbole für Schlussfolgerungen und Äquivalenzen je nach Anwendungsgebiet:

$\vdash, \vDash, \prec, \rightarrow$ entsprechen der logischen Implikation: \Rightarrow

$\Vdash, =, \equiv, \langle \rangle, \Leftrightarrow$ entsprechen der logischen Äquivalenz: \Leftrightarrow

Aussagenlogische Formeln

- Da Aussagen wegen der Unteilbarkeit sinnvollerweise mit Buchstaben abgekürzt werden, nennt man sie auch *Literale*
- Eine aussagenlogische **Formel** ist eine Verknüpfung von endlich vielen Literalen mit logischen Operatoren.
 - Die Literale einer Formel entsprechen Variablen, die mit w und f belegt werden können.
 - Formeln können auch Konstante enthalten:
 - Die Konstante \top ist immer wahr und das neutrale Element bezüglich der Konjunktion.
 - Die Konstante \perp ist immer falsch und das neutrale Element bezüglich der Disjunktion.
- Eine **Belegung einer Formel** ist eine Zuweisung von Wahrheitswerten an die Literale derart, dass dieselben Literale immer denselben Wahrheitswert erhalten.

Die Formel als ganze bekommt durch die Belegung ebenfalls einen Wahrheitswert.

Aussagenlogische Formeln

- Eine Formel heißt **erfüllbar**, wenn es eine Belegung gibt derart, dass die Formel den Wahrheitswert w hat.

Eine Formel, in der jeder Literal höchstens einmal vorkommt, ist immer erfüllbar!

Eine Formel, in der keine Negation vorkommt, ist immer erfüllbar!

⇒ Nur Formeln, die einen Literal mehrfach und mindestens eine Negation enthalten, könnten unerfüllbar sein.

- Eine Formel heißt **Tautologie** oder **gültig**, wenn sie bei **jeder** Belegung den Wahrheitswert w hat.

- Eine Formel heißt **widersprüchlich**, wenn sie bei **keiner** Belegung den Wahrheitswert w hat.

Aussagenlogische Formeln

Erfüllbarkeitsproblem (Satisfiability, SAT):

Wie bekommt man heraus, ob eine gegebene Formel erfüllbar ist ?

Normalformen

Definition:

Eine aussagenlogische Formel ist in **konjunktiver Normalform (KNF)**, wenn sie als Konjunktion von Disjunktionen aus Aussagen oder Negationen von Aussagen dargestellt ist.

Etwas langsamer zum Mitdenken:

Ein **Literal** ist eine Aussage oder die Negation einer Aussage.

Beispiele: p $\neg q$ r $\neg r$

Eine **Klausel** ist eine Disjunktion aus Literalen.

Beispiele: $p \vee \neg q \vee r$ $\neg p \vee \neg q \vee \neg r$ $p \vee q$

Eine **Formel in KNF** ist eine Konjunktion von Klauseln.

Beispiel: $(p \vee \neg q \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee \neg r) \wedge (p \vee q)$

Normalformen

Definition:

Eine aussagenlogische Formel ist in **konjunktiver Normalform (KNF)**, wenn sie als Konjunktion von Disjunktionen aus Aussagen oder Negationen von Aussagen dargestellt ist.

Spezialfälle:

Eine **Klausel** darf auch nur aus einem Literal bestehen.

Beispiel: $(p \vee \neg q \vee r) \wedge \neg p \wedge (p \vee q)$ ist auch in KNF

Eine **Formel** darf auch nur aus einer Klausel bestehen.

Beispiel: $p \vee \neg q \vee r$ ist auch in KNF

Eine **leere Klausel** entspricht dem neutralen Element der Disjunktion: \perp

Beispiel: $(p \vee \neg q \vee r) \wedge \perp \wedge (p \vee q)$ ist auch in KNF

Eine **leere Formel** entspricht dem neutralen Element der Konjunktion: \top

Beispiel: \top ist auch in KNF

Normalformen

Welche Formeln sind eigentlich **nicht** in KNF ?

- Formeln, die andere als die 3 Booleschen Operatoren enthalten

Beispiel: $((p \vee \neg q \vee r) \rightarrow (\neg p \vee \neg q \vee \neg r)) \leftrightarrow (p \vee q)$

- Formeln, in denen andere Terme als atomare Aussagen negiert werden

Beispiel: $\neg(p \vee \neg q \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee \neg r) \wedge \neg(p \vee q)$

- Formeln, in denen Konjunktionen und Disjunktionen wild durcheinander sind

Beispiel: $(p \wedge (\neg q \vee r)) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee \neg r) \vee p \wedge q$

Beispiel: $p \wedge (\neg q \vee r \wedge \neg p) \vee (\neg q \wedge \neg r) \vee p \wedge q$

- Formeln, in denen eine tiefere Klammerschachtelungstiefe vorliegt

Beispiel: $p \wedge (\neg q \vee (r \wedge q)) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee \neg r) \wedge p \vee q$

Satz: **Jede** aussagenlogische Formel lässt sich durch endlich viele äquivalente Umformungen in KNF bringen.

Normalformen

Warum wollen wir Formeln in KNF bringen ?

- **Übersichtlichere Auswertung beim Erfüllbarkeitstest:**

Eine Formel in KNF ist erfüllbar.

⇔ Eine Belegung enthält für jede Klausel wenigstens einen wahren Literal.

Mögliche Belegungsstrategie:

- Gehe die Klauseln nacheinander durch:
- Belege genau einen noch nicht festgelegten Literal mit τ
(dadurch werden gleiche Literale oder deren Negationen in anderen Klauseln festgelegt)
- Wenn es keine Möglichkeit mehr gibt, springe zurück zur vorigen Klausel und nimm eine andere Belegung

Vorsicht vor Illusionen:

**Im schlechtesten Fall bringt das keinen Zeitgewinn
verglichen mit purem Ausprobieren !**

Normalformen

Warum wollen wir Formeln in KNF bringen ?

- **Kompakte Darstellbarkeit im Computer:**

Stelle Klauseln als Mengen von Literalen dar:

$\{p, \neg q, r\}$ entspricht $(p \vee \neg q \vee r)$ **als Klausel**

Stelle Formeln als Mengen von Klauseln dar:

$\{\{p, \neg q, r\}, \{\neg p, \neg q, \neg r\}, \{p, q\}\}$ entspricht $(p \vee \neg q \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee \neg r) \wedge (p \vee q)$

Das funktioniert sogar für die Spezialfälle:

$\{\{p, \neg q, r\}\}$ entspricht $(p \vee \neg q \vee r)$ **als Formel**

$\{\{p\}, \{\neg q\}, \{r\}\}$ entspricht $(p \wedge \neg q \wedge r)$ **als Formel**

$\{\}$ entspricht \top **als Formel**

$\{\{\}\}$ entspricht \perp **als Formel**

Warnung:

Was dem Computer glasklar ist, kann für den Menschen höchst verwirrend sein:

- Das Trennzeichen (,) in **inneren** Klammern (Klauseln) entspricht einer Disjunktion (\vee)
- Das Trennzeichen (,) in **äußeren** Klammern (Formeln) entspricht einer Konjunktion (\wedge)

Normalformen

Algorithmus zum Umwandeln einer Formel in die KNF:

1. Eliminiere alle Operatoren der Form \leftrightarrow und \rightarrow mit den Ersetzungsregeln durch \wedge und \vee !
2. Ziehe alle Negationszeichen vor Klammern in die Klammern hinein mit den deMorganschen Regeln !
3. Wende die Distributivgesetze so lange an, bis auf oberster Ebene nur noch Konjunktionen und darunter Disjunktionen sind !

Das funktioniert immer !

Andere Normalformen

Definition:

Eine aussagenlogische Formel ist in **disjunktiver Normalform (DNF)**, wenn sie als Disjunktion von Konjunktionen aus Aussagen oder Negationen von Aussagen dargestellt ist.

Jetzt fällt das Mitdenken schon leichter:

Was ist ein DNF-Literal ?

Was ist eine "DNF-Klausel" ?

Was ist eine DNF-Formel ?

Beispiele ?

Warum wollen wir Formeln in DNF bringen ?

wollen wir nicht: Eine Normalform reicht uns aus !

Zusammenfassung: Aussagenlogische Formeln

Formeln haben logische Eigenschaften (Semantik):

- **Erfüllbarkeit**
 - **Widerspruch** äquivalent zu \perp
 - **Tautologie** äquivalent zu \top
 - *Widerlegbarkeit*
- } komplementär zueinander
- } komplementär zueinander

Formeln haben Darstellungseigenschaften (Syntax):

- **Normalformen (KNF oder DNF)**
- **Mengendarstellung der KNF**

Die eben genannten Darstellungseigenschaften sind für jede Formel durch Äquivalenz erzielbar.

Es gibt auch Darstellungseigenschaften, die nur für bestimmte Formeln möglich sind.

Bsp.: KNF mit Klauseln aus genau drei Literalen

Anwendung: Widerspruchsfindung mittels Resolution

Aufgabe: *äquivalent zum Erfüllbarkeitsproblem: nicht effizient lösbar*

Gegeben eine Menge \mathcal{F} von logischen Formeln. Berechne, ob sie widersprüchlich ist.

Methode:

Äquivalente Formelumformungen: Ziel ist es, die Konstante \perp herzuleiten.

Wir arbeiten so lange mit allgemeinen Formeln, bis es nicht mehr weitergeht!

Resolutionsprinzip:

Generierung einer neuen Formel als Folgerung aus 2 gegebenen Formeln

Prinzip: Finde Literal c , der in den Formeln $a \vee c$ und $b \vee \neg c$ vorkommt.

Dann kann c **eliminiert** werden: $(a \vee c) \wedge (b \vee \neg c) \rightarrow (a \vee b)$

Die neue Formel heißt **Resolvente** der alten Formeln.

Durch eine solche Eliminierung können einzelne Literale isoliert werden:

Bsp.: $(a \vee c) \wedge \neg c \rightarrow a$ Interpretation: a muss in der Formelsammlung gelten.

Wenn auf diese Weise auch die Negation isoliert wird, ergibt sich ein Widerspruch:

Widerspruch!

Bsp.: $(\neg a \vee d) \wedge \neg d \rightarrow \neg a$ Interpretation: $\neg a$ muss in der Formelsammlung gelten.