Der Satz von Menger

und seine Anwendung auf Algorithmen zur Berechnung von Ecken und Kanten

Dozent: Prof. Dr. Iwanowski

Erarbeitet von: Katharina Schmitz

Kontakt: wi4586@fh-wedel.de

Erstellt im WS 2004/05

Informatikseminar (h602)

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

In der Graphentheorie werden verschiedene Systeme zur Verfügung gestellt, um unterschiedliche Probleme lösen zu können, die auf den ersten Blick keine Gemeinsamkeiten aufweisen. Sie bietet Verfahren, die problemunabhängig formuliert sind und eine graphische Darstellung ermöglichen.

Im Folgenden werden Graphen betrachtet, welche Kommunikationsnetzwerke darstellen, die einen durch Datenübertragungswege realisierten Verband mehrerer Rechner sichtbar machen. In einem solchen Netzwerk werden Informationen über Leitungen und Rechner von einem Punkt zu einem anderen übermittelt.

Dabei ist die Verletzlichkeit solcher Netze dadurch gekennzeichnet, wie groß die Zahl der Leitungen und Rechner ist, die ausfallen müssen, damit die Kommunikation des Netzes gestört ist.[1]

Diese Arbeit beschäftigt sich mit der Frage, wie viele Kommunikationswege, sowohl Leitungen als auch Rechner, ausfallen müssen, bis die Kommunikation zwischen den verbliebenen Rechnern nicht mehr gewährleistet ist.

Zuerst wird sich diese Ausarbeitung mit den Grundlagen der Graphentheorie beschäftigen, die für das weitere Verständnis notwendig sind. Dabei werden der Graph und seine Eigenschaften näher betrachtet und es wird ein Netzwerk aus einem solchen Graphen konstruiert, welches im weiteren Verlauf benötigt wird.

Das anschließende Kapitel befasst sich mit dem Satz von Menger. Es werden zunächst weitere Begriffe eingeführt, die als Vorraussetzung für die eigentliche Definition des Satzes dienen. Der Satz von Menger wird dann über eine Herleitung bewiesen.

Im Anschluss wird dieser Satz zunächst auf Eckenzusammenhangszahlen angewandt und in Verbindung mit einem Algorithmus zur Bestimmung einer Zusammenhangszahl für einen Graphen gebracht.

---

[1] Vgl.: Turau, Volker (1996) Algorithmische Graphentheorie, Bonn : Addison-Wesley (Deutschland) GmbH, S.2

Auf den Begriff der Kantenzusammenhangszahlen wird zum Ende der Ausarbeitung eingegangen. Die Definition und Herleitung dieser Zahl unterscheidet sich nur geringfügig zu der der Eckenzusammenhangszahl.

2 Grundlagen

2.1 Grapheneinführung

Graphen können verschiedene Eigenschaften und Ausprägungen besitzen. Jeder Graph besteht aus einer Eckenmenge E und einer Kantenmenge K. Die Anzahl der Kanten wird mit m und die Anzahl der Ecken mit n bezeichnet. Eine Kante ist durch ein ungeordnetes Paar von Ecken gekennzeichnet.

Ein Graph ist ungerichtet, wenn zwischen den einzelnen Ecken keine Richtung vorgegeben ist. In Abbildung 2.1 werden die Ecken als Punkte dargestellt und durch Verbindungslinien, welche die Kanten darstellen, miteinander verbunden.

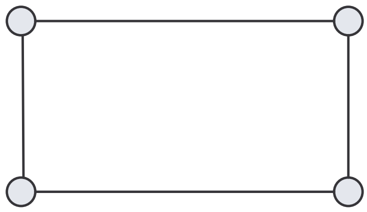

Abbildung 2.1: ungerichteter Graph

Ein gerichteter Graph dagegen hat gerichtete Kanten, die durch eine Anfangs- und eine Endecke gekennzeichnet sind. Graphisch wird dies mit Pfeilen dargestellt, wie es in Abbildung 2.2 zu erkennen ist.

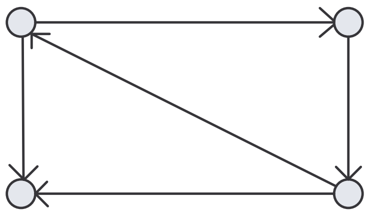

Abbildung 2.2: gerichteter Graph

In einem vollständigen Graphen können alle Ecken miteinander kommunizieren. So ist der Graph aus Abbildung 1 ebenfalls ein vollständiger Graph, da die obere linke Ecke sowohl über die untere linke als auch über die obere rechte Ecke mit der unteren rechten Ecke erreicht werden kann. In Abbildung 2.3 ist ein vollständig zusammenhängender Graph zu sehen. Jede Ecke ist durch eine Kante direkt mit jeder anderen Ecke verbunden.

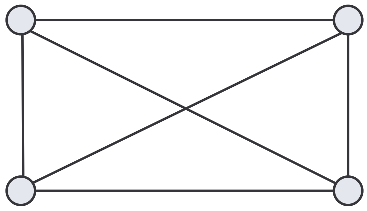

Abbildung 2.3: vollständig zusammenhängender Graph

In einem gerichteten Graphen hat eine Ecke einen Aussengrad $g^+(e)$, der die Anzahl der Kanten bestimmt, die in eine Ecke hineingehen. Der Innengrad $g^-(e)$einer Ecke ist dagegen die Anzahl der Kanten, die aus einer Ecke heraus fließen. Ist sowohl der Innen- als auch der Aussengrad eine Kante Null, so handelt es sich dabei um eine isolierte Ecke, die mit keiner der anderen Ecke durch eine Kante verbunden ist.

Eine Folge von Kanten wird als Kantenzug bezeichnet. Ein solcher Kantenzug ist ein Weg, wenn alle verwendeten Kanten verschieden sind (Turau S. 17). Ein Weg besitzt eine Anfangsecke e_0 und eine Endecke e_s. Sind beide Ecken identisch, ist der Weg geschlossen. In der Abbildung 2.4 existiert ein Weg von der Ecke e_2 nach e_5, welcher über die Ecken e_3 und e_4 geht.

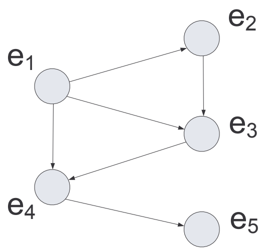

Abbildung 2.4: gerichteter Graph

2.2 Konstruktion eines Netzwerkes

Im folgenden Kapitel wird auf Basis des Graphen ein Netzwerk als Hilfskonstrukt für den Beweis des Satzes von Menger benötigt. Es wird dabei ein Graph zu einem gerichteten Netzwerk erweitert, so dass im Weiteren daran gezeigt werden kann, dass aus einer Ecke eine Kante erzeugt werden kann, so dass die Zusammenhänge von Kanten auch auf die von Ecken zurückgeführt werden können. Die Konstruktion wird nun in diesem Abschnitt vorweggenommen.

Ein ungerichteter Graph G wird zu einem gerichteten Netzwerk N erweitert. Zunächst werden für eine Ecke e zwei Ecken e’ und e’’ erstellt, die durch eine gerichtete Kante (e’, e’’) miteinander verbunden sind.

Um die Eigenschaften des Graphen zu erhalten, werden für jede Kante (e, w) des Graphen G zwei Kanten im Netzwerk benötigt. Diese Kanten zeigen von e’’ nach w’ und von e’ nach w’’. Für das Netzwerk gilt, dass alle Kanten die Kapazität 1 erhalten. Die Quelle des Netzwerken ist a’’ und die Senke ist b’. Die Ecken a’ und b’’ können dagegen vernachlässigt werden, wobei sie nicht explizit entfernt werden brauchen.[2]

In Abbildung 2.5 werden ein ungerichteter Graph und ein dazugehöriges Netzwerk gezeigt. Die rot eingefärbten Ecken und Kanten zeigen die erste Erweiterung des Graphen. Die blauen Kanten zeigen die im zweiten Schritt eingeführten Kanten von e’’ nach w’ und von e’ nach w’’.

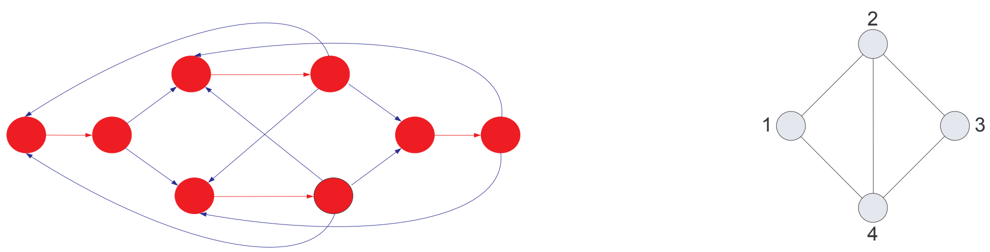

Abbildung 2.5: Netzwerk N und Graph G[3]

[2] Vgl.: Turau, Volker S. 212
[3] Vgl.: Turau, Volker S. 213

Ein solches 0-1-Netzwerk hat die Eigenschaft, dass die Kanten bei einmaliger Nutzung die Kapazität 0 erhalten und so für eine weitere Nutzung nicht mehr zur Verfügung stehen. Die dabei entstehenden Wege sind alle kantendisjunkt.

3 Der Satz von Menger

Dieses Kapitel handelt von dem Satz von Menger als Vorraussetzung für die Ecken- und Kantenzusammenhangszahlen. Vor der eigentlichen Definition des Satzes, werden einige Begriffe und Zusammenhänge erklärt, die für das Verständnis des Beweises notwendig sind. In Anschluss folgt die eigentliche Definition mit dazugehörigem Beweis.

3.1 Begriffe

3.1.1 Eckenmenge

Das in der Einleitung angesprochene Problem der Anzahl der Stationen, die ausfallen müssen, damit eine Kommunikation in einem Netzwerk nicht mehr stattfinden kann, führt zu einer Reihe von neuen Begriffen.

In einem ungerichteten Graphen ist die Menge T^e eine trennende Eckenmenge für die Ecken a und b unter der Voraussetzung, dass jeder Weg auf dem Graphen über mindestens eine Ecke aus T^e verläuft. Die Ecken a und b sind dabei nicht benachbart (gekennzeichnet mit $a \nsim b$). In Abbildung 3.1. sind die Ecken 2 und 3 benachbart. Die Ecken 2 und 9 sind dagegen nicht benachbart und durch die Ecken 1, 3, 4 und 10 voneinander getrennt. Damit gehören diese Ecken der trennenden Eckenmenge an.

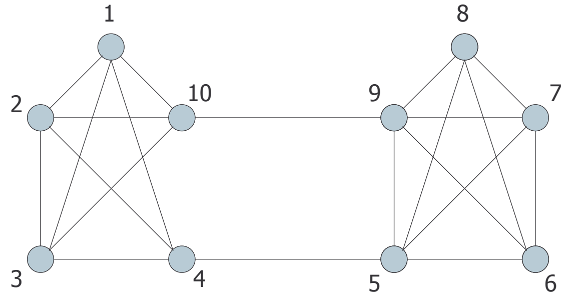

Abbildung 3.1: ungerichteter Graph[4]

$Z^e(a, b)$ ist die minimale trennende Eckenmenge für die Ecken a und b. Es ist also die Menge der Ecken, die mindestens aus einem Graphen entfernt werden müssen, damit die Ecken a und b nicht mehr miteinander in Beziehung stehen.

- $Z^e(a, b) = \min \{|T^e| \mid T$ ist trennende Eckenmenge für a, b$\}$

Der Graph aus Abbildung 3.1. hat eine minimale trennende Eckenmenge für die Ecken 2 und 9, die mit $Z^e(2,9) = 2$ beschrieben wird. Werden die beiden Ecken entfernt, fallen auch die dazugehörigen Leitungen zur Übertragung aus und eine Kommunikation ist nicht mehr gewährleistet.

Ein weiterer Begriff ist die Menge der Wege, die außer der Quelle a und der Senke b keine gemeinsamen Ecken in einem Graphen haben. $W^e(a, b)$ ist damit die maximale Anzahl von paarweise eckendisjunkten Wegen von a nach b. Auch hierbei gilt, dass die Ecken a und b nicht benachbart sind.

Aus dieser Definition der beiden Begriffe lässt sich als Zusammenhang folgende Ungleichung schlussfolgern:

- $Z^e(a, b) \geq |T^e| \geq W^e(a, b)$

Jeder Weg, der in $W^e(a, b)$ betreten wird, enthält eine Ecke aus $Z^e(a, b)$, denn es gibt keinen Weg von a nach b der keine Ecke aus $Z^e(a, b)$ nutzt. Wäre das der Fall, wäre $Z^e(a, b)$ keine minimale trennende Eckenmenge mehr für die Ecken a und b. Da die Wege aus $W^e(a, b)$

[4] Vgl.: Turau, Volker S. 211

eckendisjunkt sind, kann keine Ecke aus $Z^e(a, b)$ doppelt in der Menge von $W^e(a, b)$ auftauchen. Damit enthält $Z^e(a, b)$ mindestens $W^e(a, b)$ Wege.

3.1.2 Kantenmenge

Der Begriff der trennenden Eckenmenge ist von Interesse, wenn es um den Ausfall von Stationen in einem Netzwerk geht. Daneben gibt es auch noch die einzelnen Leitungen, deren Unterbrechung eine Kommunikation in einem Netzwerk stören kann. Dies führt wiederum zu dem Ausdruck der trennenden Kantenmenge.

Wie bei der trennenden **Eckenmenge** sind a und b zwei nicht benachbarte Ecken. T^k ist nun die trennende **Kantenmenge** für diese beiden Ecken, wenn jeder Weg von a nach b über eine dieser Kanten verläuft.

Ähnlich wie die minimale trennende Eckenmenge, gibt es auch eine minimal trennende Kantenmenge $Z^k(a, b)$, für die gilt,

- $Z^k (a, b) = \min \{|T^k| \mid T \text{ ist trennende Kantenmenge für } a, b\}$

Der Graph aus der Abbildung 3.2. hat für die beiden Ecken 5 und 6 eine minimal trennende Kantenmenge $Z^k(5, 6) = 2$. Werden die Kanten (6,5) und (4,5) aus dem Graphen entfernt, so ist keine Kommunikation zwischen den Ecken 5 und 6 mehr möglich.

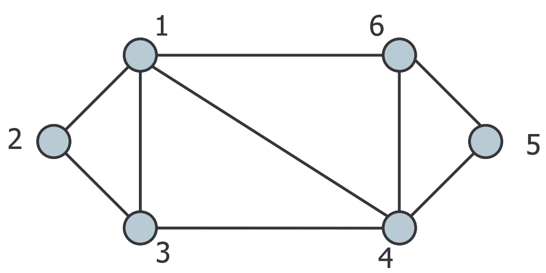

Abbildung 3.2: ungerichteter Graph[5]

[5] Vgl.: Turau, Volker S. 220

$W^k(a, b)$ ist die maximale Anzahl von kantendisjunkten Wegen von a nach b im Graphen. Der beschriebene Zusammenhang zwischen $W^e(a, b)$ und $Z^e(a, b)$ unter 3.1.1. gilt auch für die trennenden Kantenmengen. Jeder Weg aus $W^k(a, b)$ enthält eine Kante aus $Z^k(a, b)$. Da die Wege paarweise kantendisjunkt sind, kann keine Kante aus $Z^k(a, b)$ mehrfach in $W^k(a, b)$ vorkommen. Das heißt, dass $Z^k(a, b)$ mindestens so viele Kanten wie $W^e(a, b)$ enthält:

- $|Z^k(a, b)| \geq |W^k(a, b)|$

3.2 Definition

Ausgehend davon, dass a und b zwei nicht benachbarte Ecken in einem ungerichteten Graphen sind, definierte Menger 1927 den Zusammenhang zwischen den Größen $W^e(a, b)$ und Z^e (a, b) wie folgt:

- $Z^e(a, b) = W^e(a, b)$

Die minimale Anzahl von Z^e (a, b) von Ecken, die entfernt werden müssen, um a und b voneinander zu trennen, ist gleich der maximalen Anzahl W^e (a, b) von Wegen von a nach b.

Analog dazu kann die Aussage für die Kanten getroffen und bewiesen werden. Es seien a und b Ecken eines ungerichteten Graphen, dann gilt:

- $Z^k(a, b) = W^k(a, b)$

3.3 Beweis

3.3.1 Kantenversion

Der Beweis für den Satz von Menger wird zunächst in mehrere Teilschritte unterteilt, so dass es übersichtlicher und verständlicher wird. Die folgende Ungleichung ist Ausgangspunkt für den Beweis. Nach und nach werden die einzelnen Abschnitte erklärt und bewiesen, so dass über dieses Hilfskonstrukt der Satz von Menger bewiesen werden kann.

Hilfssatz 3.3.1.1:

Sei N ein Netzwerk mit der Quelle in a'' und einer Senke in b' und der Kapazität $k(X, \overline{X}) = 1$ auf allen Kanten. Sei $W^k(a, b)$ ein maximales Wegsystem von a'' nach b' und $Z^k(a, b)$ eine minimale trennende Kantenmenge, dann gilt:

- $|f| \leq |W^k(a, b)| \leq |Z^k(a, b)| \leq k(X, \overline{X})$

für alle Flüsse f und alle Schnitte $(X, \overline{X})$ in N.[6] (Zschienger)

Dies wird nun in den folgenden Teilschritten bewiesen:

1. $|f| \leq |W^k(a, b)|$
2. $|W^k(a, b)| \leq |Z^k(a, b)|$
3. $|Z^k(a, b)| \leq k(X, \overline{X})$

Zu 1.: Nach der Definition von 0-1-Netzwerken (genauer nachzulesen im Turau Kapitel 6.5) hat ein Netzwerk einen maximalen binären Fluss f. Der Wert dieses Flusses ist gleichzeitig der Anzahl von disjunkten Wegen von a' nach b''. Daraus folgt, dass der Wert des Flusses höchstens den Wert der Anzahl von Wegen in einem Netzwerk entsprechen kann, so dass $|f| \leq W^k(a, b)$ gilt

Zu 2.: Die Abhängigkeit von $W^k(a, b)$ und $Z^k(a, b)$ ist im Kapitel 3.1.2 hergestellt worden.

[6] Vgl.: Beutelspacher, Albrecht; Zschienger, Marc-Alexander (2002) Diskrete Mathematik für Einsteiger, 2. Auflage, Braunschweig : Vieweg, 2002, S. 182

Zu 3.: Der letzte Teil sagt aus, dass die Kapazität des Schnittes in einem Netzwerk mindestens den Wert der minimal trennenden Kantenmenge hat: $|Z^k(a, b)| \leq k\,(X, \overline{X})$.

Jeder Schnitt $(X, \overline{X})$ in einem Netzwerk ist eine trennende Kantenmenge für die Ecken a' und b''. Es wird davon ausgegangen, dass a' ein Element aus X ist und b'' ein Element aus $\overline{X}$. Somit muss jeder Weg von a' nach b'' eine Kante aus der Schnittmenge $(X, \overline{X})$ nutzen. Dadurch ist der Wert aus $Z^k(a, b)$ kleiner oder gleich des Wertes aus jeder beliebigen trennenden Menge. Im Besonderen gilt die für die Schnittmenge $(X, \overline{X})$, so dass $|Z^k(a, b)| \leq |(X, \overline{X})|$ gilt.

Ein Schnitt in einem Netzwerk ist somit mindestens so groß wie die Anzahl der minimal trennenden Kanten. Es ist im Weiteren zu beachten, dass der Wert des Schnittes gleich dem Wert der Kapazität des Netzes ist, welches daraus resultiert, dass die Kapazität einer jeden Kante 1 ist.

Werden diese Aspekte miteinander verknüpft, gilt:

$$k(X, \overline{X}) = \sum_{a \in (X, \overline{X})} k(a) = \sum_{a \in (X, \overline{X})} 1 = |(X, \overline{X})|$$

So folgt daraus, dass $|Z^k(a, b)| \leq k\,(X, \overline{X})$. . Somit ist bis hier der Hilfssatz bewiesen.

Sei f ein maximaler Fluss und $(X, \overline{X})$ ein minimaler Schnitt in einem Netzwerk, gilt nach dem Hilfssatz 3.3.1.1. für jedes W^k und Z^k, dass $|f| \leq |W^k(a, b)| \leq |Z^k(a, b)| \leq k\,(X, \overline{X})$ ist. Da *f* maximal und der Schnitt $(X, \overline{X})$ minimal ist, gilt der Satz von Ford und Fulkerson:

- Der Wert eines maximalen Flusses in einem Netzwerk ist gleich der minimalen Kapazität eines Schnittes:
  - $|f| = k\,(X, \overline{X})$.[7]

Dieser Satz wird nun auf den Hilfssatz 3.1.1.1. übertragen. Wenn $|f|$ und $k|(X, \overline{X})|$ gleich sind, können sie in der Gleichung gegeneinander ausgetauscht werden. Somit gilt, dass

[7] Turau, Volker, S 169

$Z^k(a, b) \leq |f|$ ist. Damit ist auch $W^k(a, b) \leq |f|$ und daraus folgt, dass $|f| = W^k(a, b)$ ist. Auf die gleiche Weise wird nun $k|(X, \overline{X})| \leq W^k(a, b)$ gesetzt, wodurch $k|(X, \overline{X})|$ gleichzeitig auch kleiner gleich $Z^k(a, b)$ ist und daraus folgt, dass $Zk(a, b) = k|(X, \overline{X})|$ ist.

So gilt über den gesamten Satz Gleichheit:

- $|f| = W^k(a, b) = Z^k(a, b) = k|(X, \overline{X})|$

3.3.2 Eckenversion

Als Vorraussetzung für den Beweis in Zusammenhang mit der minimalen trennenden Eckenmenge wird das in Kapitel 2.2. vorgestellte Netzwerk benötigt. Durch das Erstellen eines Netzwerkes wird erreicht, dass die im Graphen vorhandenen Ecken durch Kanten dargestellt werden können, so dass der Hilfssatz auch auf die Ecken anwendbar und gültig ist.

Dann gilt, dass jeder Weg im Netzwerk von a'' nach b' den gleichen Weg wie im Graphen von a nach b zurücklegt. Gleichzeitig sind die Wege im Netzwerk genau dann disjunkt, wenn sie auch im Graphen disjunkt sind. Das gleiche trifft dann auch die minimal trennenden Kanten und Eckenmengen zu. Die Mächtigkeit der trennenden Kantenmenge im Netzwerk stimmt dann auch mit der trennenden Eckenmenge im Graphen überein.

Für dieses Netzwerk gilt, dass

- $W^e(a, b)$ in $G = W^k(a'', b')$ in N
- $Z^e(a, b) = Z^k{}_N(a, b)$

Nach der Kantenversion des Satzes von Menger gilt damit, dass $|W^e| = |W^k| = |Z^k| = |Z^e|$.[8]

---

[8] Beutelspacher, Albrecht; Zschienger, Marc-Alexander, S. 184

4 Zusammenhangszahlen

Die Definition vom Satz von Menger gilt auch auf ungerichtete Graphen. Daher können Aussagen über diese Art von Graphen getroffen werden. In den folgenden Kapitelabschnitten wird es auf dieser Basis um Ecken- und Kantenzusammenhangszahlen gehen.

4.1 Eckenzusammenhangszahl

Die Eckenzusammenhangszahl $Z^e(G)$ eines Graphen ist die Mindestanzahl von Ecken, die entfernen werden müssen, um einen nicht zusammenhängenden Graphen zu erhalten. Ist ein solcher Graph vollständig zusammenhängend, so ist $Z^e(G)$ die Anzahl der Ecken minus eins, denn es müssten alle Ecken außer der Ausgangsecke a entfernt werden, damit zwischen den Ecken a und b nicht mehr kommuniziert werden kann, da jede Ecke über eine Kante mit jeder anderen Ecke verbunden ist.

Ist der Graph nicht vollständig zusammenhängend, gilt:

- $Z^e(G) = \min \{Z^e(a, b) \mid a, b \text{ Ecken von } G \text{ mit } a \sim b\}$.

Damit gilt nach dem Satz von Menger auch, dass

- $Z^e(G) = \min \{W^e(a, b) \mid a, b \text{ Ecken von } G \text{ mit } a \sim b\}$.

Für vollständige Graphen gilt $W^e(a, b) = n-1$ für alle Ecken a, b. Daraus ergibt sich, dass $Z^e(G) = \min \{W^e(a, b) \mid a, b \text{ Ecken von } G\}$ für beliebige Graphen gilt. Auf den genaueren Beweis wird hier verzichtet (nachzulesen in Turau S. 214).

Ein Graph wird z-fach zusammenhängend genannt, wenn $z \leq Z^e(G)$ ist. Von Interesse ist dabei, ob ein Graph für ein vorbestimmtes z zusammenhängend ist. Der folgende Satz wurde von Whitney 1932 bewiesen:

- Ein Graph ist genau dann z-fach zusammenhängend, wenn es für je zwei Ecken a und b mindestens z disjunkte Wege von a nach b gibt.[9]

Es soll nun aus dem Satz von Menger und dem Satz von Whitney ein Algorithmus entstehen, der für einen möglichst geringen Aufwand die Eckenzusammenhangszahl für einen Graphen bestimmen kann.

Bei dem Beweis des Satzes von Menger ist bewiesen worden, dass $W^e(a, b)$ gleich dem Wert des maximalen Flusses auf dem Netzwerk ist. Wird dies nun in einen Algorithmus umgesetzt, kann $Z^e(G)$ mit dem Aufwand von $O(n^{5/2}m)$ berechnet werden. Dafür wird der Algorithmus von Dinic für jedes Paar von nicht benachbarten Ecken aufgerufen. Da es allerdings nicht notwendig ist für alle nichtbenachbarten Ecken den Wert von $W^e(a, b)$ zu bestimmen, entsteht die folgende Funktion `zusammenhangszahl`:

```
function zusammenhangszahl (G : Graph) : Integer;
var
  N : 0-1-Netzwerk
  z, i, j : Integer;

begin
  N := netzwerk(G)
  z := n - 1;
  i := 0;

  while i ≤ z do begin
    i := i + 1;
    for j := i + 1 to n do
      if es existiert keine Kante von i nach j then
        z := min{z, maxfluß(N,i,j)};
  end;
  zusammenhangszahl := z;
end
```

Abbildung 4.1: Die Funktion zusammenhangszahl[10]

[9] Turau, Volker, S. 215
[10] Turau, Volker, S. 215

Diese Funktion bestimmt die Eckenzusammenhangszahl für einen ungerichteten Graphen G. Die Funktion `netzwerk(G)` erstellt zu dem übergebenen Graphen G ein dazugehöriges Netzwerk nach den Vorgaben aus Kapitel 2.2. In der Funktion `maxfluß(N,i,j)` wird der Wert eines maximalen Flusses auf dem Netzwerk N mit der Quelle in i und der Senke in j bestimmt.
In der Funktion werden die Ecken in einer festen Reihenfolge betrachtet. Dabei wird für jede Ecke i die Werte für $Z^e(i, j)$ bestimmt. Es gilt, dass nur die Ecken dafür verwendet werden, die nicht benachbart sind und das die Ecke j in der Reihenfolge nach i steht. Zu jedem Zeitpunkt gilt $z \leq Z^e(G)$.

Die Ecken a und b sind nicht zusammenhängend und $Z^e(a, b) = Z^e(G)$. T^e ist die minimal trennende Eckenmenge für die Ecken a und b. G' ist der zu G gehörende Untergraph, der die Ecken E aus dem Graphen G enthält, die um die Ecken der trennenden Eckenmenge T^e verringert ist. Damit ist dann der Graph G' nicht mehr zusammenhangend und die while-Schleife wird mit $i > z > Z^e(G) = |T|$ verlassen.

Damit ist die Ecke x bearbeitet worden, die nicht in T^e liegt. Ist nun y eine Ecke aus dem Graphen G' und liegt diese Ecke nicht im gleichen Zusammenhangsteil wie x, dann ist T^e auch eine trennende Eckenmenge für die Ecken x und y in G. So gilt:

- $Z^e(G) \leq z \leq Z^e(x, y) \leq |T| = Z^e(G)$

Wie im Abschlussteil beim Beweis des Satzes von Menger wird durch Umstellen der Gleichung bewiesen, dass $Z^e(G) = z$ ist und somit auch die Funktion `zusammenhangszahl` den Wert $Z^e(G)$ zurückliefert.

Dabei wird die Eckenzusammenhangszahl eines ungerichteten Graphen mit dem Aufwand $O(\sqrt{n}m^2)$ bestimmt.[11]

---

[11] Turau, Volker, S. 217

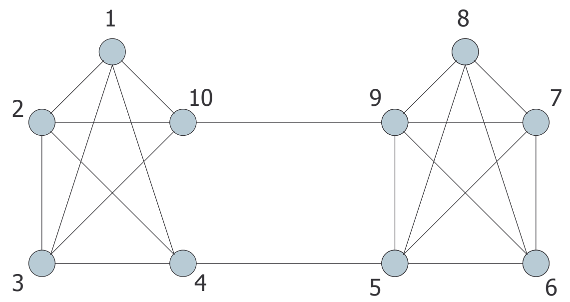

Abbildung 4.2: ungerichteter Graph

Wird diese Funktion nun auf den Graphen aus Abbildung 4.2. angewendet, ergeben sich folgende Aufrufe:

1. $Z^e(1, j)$ für $j = 5,..,9$ – alle Werte sind 2 und damit ist $z = 2$.
2. $Z^e(2, j)$ für $j = 5,..,9$ – nun ist $i = 3$ und $z = 2$.
3. Die while-Schleife ist beendet und $Z^e(G) = 2$.

Da in den meisten Fällen das Interesse nicht bei der genauen Eckenzusammenhangszahl liegt, gibt es einen weiteren Algorithmus, der berechnet, ob die Zusammenhangszahl unter einem bestimmten Wert liegt.

Bei dem nun betrachteten Graphen G handelt es sich um einen ungerichteten Graphen. Hier wird nun wiederum ein Hilfsgraph benötigt, um die Berechnung durchführen zu können. Es wird mit l die Anzahl der eingeführten Kanten beschrieben. G_l ist der Graph, der entsteht, wenn eine zusätzliche Ecke s eingeführt wird, die mit den Kanten e_1 bis e_l diese Ecke mit dem Ausgangsgraphen verbindet.

Die Prozedur `zusammenhangmin` berechnet, ob ein die Eckenzusammenhangszahl unter einem bestimmten Wert liegt. Dazu werden zwei Lemmata benötigt, die hier vorgestellt aber nicht bewiesen werden.

1. Lemma: Es seien l, z ganze Zahlen. Dabei gilt, dass $l \geq z \geq 1$. u ist ein Element aus der Eckenmenge des Graphen G und ist identisch mit einer der Ecken, an die die Hilfsecke s angefügt wurde. So gilt, $W^e(e_i, u) \geq z$, wobei e_i eine mit s verbundene Ecke ist. Dann ist auch $W^e(s, u) \geq z$ in G_l.
2. Lemma: j ist ein Element aller Ecken in G für die gilt, dass $i < j$ ist, so dass $Z^e(e_i, e_j) < z$ für eine ganze Zahl z ist. Dann ist $Z^e(s, e_j) < z$ in G_{j-1}.

Mit Hilfe dieser beiden Lemmata lässt sich die in Abbildung 4.1.3. aufgezeigte Prozedur beweisen. Ist G ein ungerichteter Graph mit $Z^e(G) \geq z$, dann folgt aus dem Satz von Menger, dass ist $W^e(ei, ej) \geq z$ ist. In Verbindung mit dem ersten Lemma ergibt folgt, dass $Z^e(G) < z$ ist. In zweiten for-Schleife wird nun das kleinste j gesucht, dass größer als i ist. Ergibt sich dabei, dass $Z^e(ei, ej) < z$ ist, so gilt gleichzeitig, dass $W^e(ei, ej) < z$ ist, worauf die Prozedur mit dem ersten exit verlassen wird.

Wird dagegen das zweite Lemma angewendet in Bezug auf Gj-1, wird bei Erfüllung die Prozedur über das zweite exit verlassen. Nur in dem Fall, dass der Wert von z größer ist als $Z^e(G)$ wird die Prozedur über die letzte exit-Anweisung verlassen. Der Aufwand für diese Berechnung ergibt zu $O(z^3 m + znm)$.

```
procedure zusammenhangmin (G : Graph; z : Integer);
var
  i, j : Integer;

begin
  for i := 1 to z - 1 do
    for j := i + 1 to z do
      if We(ei, ej) < z in G then
        exit ('Ze(G) < z');
  for j := z + 1 to n do
    if We(s, ej) < z in Gj-1 then
      exit ('Ze(G) < z');
  exit ('Ze(G) >= z');
end
```

Abbildung 4.3: Prozedur zusammenhangmin()[12]

4.2 Kantenzusammenhangszahl

Die Kantenzusammenhangszahl $Z^k(G)$ ist dagegen definiert als die Mindestanzahl von Kanten, die entfernt werden müssen, um einen nicht zusammenhängenden Graphen zu erhalten.

[12] Turau, Volker, S. 219

- $Z^k(G) = \min \{Z^k(a, b) \mid a, b \text{ Ecken von } G\}$

Ist der Graph nicht zusammenhängend, ist $Z^k(G)$ gleich Null. Für zyklische Graphen ab einer Eckenanzahl von drei ist die Kantenzusammenhangszahl zwei. $\delta(G)$ ist der kleinste Eckengrad in einem gerichteten Graphen. Zwischen den Werten $Z^e(G)$, $Z^k(G)$ und $\delta(G)$ besteht folgender Zusammenhang

- $Z^e(G) \leq Z^k(G) \leq \delta(G)$

Dies kann man zum Beispiel im Graphen aus Abbildung 4.2. sehen. $Z^e(G) = 2$, $Z^k(G) = 3$ und $\delta(G) = 4$.

Zur Bestimmung von $Z^k(G)$ werden wie bei der Bestimmung der Eckenzusammenhangszahl die entsprechenden Werte der minimal trennenden Kantenmenge Zk(a, b) und der maximalen Anzahl von kantendisjunkten Wegen $W^k(a, b)$ benötigt.

Für den Beweis des Satzes von Menger ist gezeigt worden, dass $W^k(a, b) = Z^k(a, b)$ ist. Auch der Satz von Whitney kann demnach auf Kantenzusammenhangszahlen angewandt werden.

- Es sei G ein ungerichteter Graph. Genau dann ist $Z^k(G) \geq z$, wenn je zwei Ecken durch mindestens z kantendisjunkte Wege verbunden sind.[13]

Der oben genannte Algorithmus kann demnach auch auf Kantenzusammenhangszahlen übertragen werden. Nach dem Algorithmus von Dinic kann $W^k(a, b)$ mit dem Aufwand von $O(n^{2/3}m)$ berechnet werden. Dann ergibt sich zur Bestimmung der Kantenzusammenhangszahl ein Aufwand von $O(n^{5/3}m)$.[14]

[13] Turau, Volker, S. 222
[14] Turau, Volker, S. 223

5 Schlusswort

In dieser Ausarbeitung ist nur der Satz von Menger wirklich bewiesen und erklärt worden. Alle anderen Aussagen und Sätze sind hier nur einfach erwähnt worden ohne die genaue Beweisführung zu berücksichtigen. Ausgangspunkt zu diesem Thema war das Buch von Herrn Volker Turau, an dessen Buch sich diese Ausarbeitung anlehnt. Hilfreich beim Verständnis ist dagegen auch das Buch von Beutelspacher und Zschienger.

Abbildungsverzeichnis

Literaturverzeichnis

Beutelspacher, Albrecht; Zschienger, Marc-Alexander (2002) Diskrete Mathematik für Einsteiger, 2. Auflage, Braunschweig : Vieweg, 2002

Turau, Volker (1996) Algorithmische Graphentheorie, Bonn : Addison-Wesley (Deutschland) GmbH