Diskrete Mathematik

Sebastian Iwanowski
FH Wedel

Kapitel 2: Mengenlehre

Referenzen zum Nacharbeiten:

Lang 3
Meinel 2, 4, 5, 10.2-10.4
(zur Vertiefung: Meinel 10.5-10.8 und Beutelspacher 10)
Dean 2, 5-7
Hachenberger 1 (teilweise), 3, 5.8

2. Mengenlehre

2.1 Grundlagen

Eigenschaften

- Reihenfolge, Einmaligkeit, Anzahl von Elementen
- Gleichheit von Mengen

Darstellung von Mengen

- Elementschreibweise
- Venn-Diagramme

2. Mengenlehre

2.1 Grundlagen

Operationen auf Mengen

Menge x Menge → Menge

- Vereinigung
- Durchschnitt
- Differenz
- Symmetrische Differenz

2. Mengenlehre

2.1 Grundlagen

Operationen auf Mengen

Menge x Menge → {w,f}

- Teilmenge / Obermenge

- Unterschied zwischen Elementbeziehung und Teilmengenbeziehung

2. Mengenlehre

2.1 Grundlagen

Operationen auf Mengen

Menge → Menge

- Bildung der Potenzmenge

- Bildung der komplementären Menge

2. Mengenlehre

2.1 Grundlagen

Operationen auf Mengen

Menge x Menge → Menge

- Kreuzprodukt

- Tupel

- Unterschiede zwischen Tupeln und Mengen

2. Mengenlehre

2.2 Relationen

Definition und Eigenschaften

Eine Relation auf M ist eine beliebige Teilmenge des Kreuzprodukts M x M

Mögliche Eigenschaften (gilt nicht für jede Relation):

- reflexiv
- symmetrisch
- transitiv
- antisymmetrisch

2. Mengenlehre

2.2 Relationen

Spezieller Relationstyp: Äquivalenzrelationen

Eine Äquivalenzrelation auf M ist eine Relation mit folgenden Eigenschaften:

- reflexiv
- symmetrisch
- transitiv

2. Mengenlehre

2.2 Relationen

Spezieller Relationstyp: Äquivalenzrelationen

Eine **Äquivalenzklasse** ist eine Menge von Elementen,
die paarweise zueinander äquivalent sind.

Eine **Partition** einer Menge M ist eine Zerlegung in disjunkte Teilmengen.

1. Zu jeder Partition gehört eindeutig eine Äquivalenzrelation.

2. Zu jeder Äquivalenzrelation gehört eindeutig eine Partition.

2. Mengenlehre

2.2 Relationen

Vertiefung: Äquivalenzrelationen

- Definition und Nachweis der Eigenschaften von Äquivalenzrelationen

- Bestimmen von Äquivalenzklassen

- Zusammenhang zwischen Äquivalenzklassen und Partitionen

2. Mengenlehre

2.2 Relationen

Spezieller Relationstyp: Ordnungsrelationen

Eine Ordnungsrelation auf M ist eine Relation mit folgenden Eigenschaften:

- reflexiv
- antisymmetrisch
- transitiv
- linear

Ordnungsrelationen werden auch *totale* Ordnungen genannt.

Bei Wegfall der Eigenschaft *linear* spricht man von *Halbordnungen* oder *partiellen Ordnungen*.

- maximale und minimale Elemente (für partielle Ordnungen)
- Maximum (Supremum) und Minimum (Infimum) (für totale Ordnungen)

2. Mengenlehre

2.2 Relationen

Darstellung von Relationen auf endlichen Mengen

- Zuordnungsdiagramm (für beliebige Relationen)

- Partition (nur für Äquivalenzrelationen)

- Hasse-Diagramm (nur für Ordnungsrelationen)

2. Mengenlehre

2.3 Funktionen

Eine **Funktion** ist eine Relation auf M x N,
in der für **jedes** $m \in M$ ein **eindeutiges** Paar (m,n) existiert.

- Definitionsbereich, Zielmenge, Bildmenge
- Abbildungsschreibweise, Funktionswertschreibweise
- Komposition (Verkettung) von Funktionen (oder Relationen): $G \circ F$

  <u>Satz:</u> Die Komposition von 2 Funktionen ist <u>immer</u> eine Funktion.

- Inverse Relationen: R^{-1}

  <u>Frage:</u> Wann ist die Inverse einer Funktion wieder eine Funktion ?

2. Mengenlehre

2.3 Funktionen

Funktionen mit speziellen Eigenschaften

- injektive Funktionen
- surjektive Funktionen
- bijektive Funktionen

<u>Satz:</u> Die Inverse F^{-1} einer Funktion F ist genau dann wieder eine Funktion, wenn F bijektiv ist.

2. Mengenlehre

2.3 Funktionen

Mächtigkeit von Mengen

Zwei endliche Mengen gelten als „gleich groß“,
wenn sie die gleiche Anzahl von Elementen enthalten.

Zwei unendliche Mengen gelten als „gleich groß“,
wenn es zwischen ihnen eine bijektive Funktion gibt.

- Diese Definition verallgemeinert die für endliche Mengen:
  Sie ist also auch auf endliche Mengen anwendbar.
- Cantorsches Diagonalverfahren für Mengen,
  die gleichmächtig zu $\mathbb{N}$ sind (*abzählbar unendliche Mengen*)
- $\mathbb{Q}$ ist abzählbar, $\mathbb{R}$ nicht

2. Mengenlehre

2.4 Boolesche Algebren

Konzept 1: Aussagenlogische Formeln und ihre Operationen:

Aussagenlogische Formeln
haben die Operatoren ¬ (einstellig) und ∧ und ∨ (jeweils zweistellig)
und die Konstanten ⊥ und ⊤, die folgenden Regeln genügen:

$$p \wedge q = q \wedge p$$
$$p \vee q = q \vee p$$
Kommutativgesetze

$$p \wedge (q \wedge r) = (p \wedge q) \wedge r$$
$$p \vee (q \vee r) = (p \vee q) \vee r$$
Assoziativgesetze

$$p \wedge (q \vee r) = (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$
$$p \vee (q \wedge r) = (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$
Distributivgesetze

$$p \wedge p = p$$
$$p \vee p = p$$
Idempotenz

$$\neg(p \wedge q) = \neg p \vee \neg q$$
$$\neg(p \vee q) = \neg p \wedge \neg q$$
deMorgansche Regeln

$$\neg\neg p = p$$
Doppelte Negation (Involution)

$$p \vee \bot = p$$
$$p \wedge \top = p$$
Neutrale Elemente

$$p \wedge \bot = \bot$$
$$p \vee \top = \top$$
“Nullmultiplikation”

$$p \wedge \neg p = \bot$$
$$p \vee \neg p = \top$$
Inverses Element (Komplement)

2. Mengenlehre

2.4 Boolesche Algebren

Konzept 2: Mengen eines Ereignisraums Ω und ihre Operationen:

Mengen eines Ereignisraums Ω
haben die Operatoren ‾ (einstellig) und ∩ und ∪ (jeweils zweistellig)
und die Konstanten ∅ und Ω, die folgenden Regeln genügen:

$$p \cap q = q \cap p$$
$$p \cup q = q \cup p$$

Kommutativgesetze

$$p \cap (q \cap r) = (p \cap q) \cap r$$
$$p \cup (q \cup r) = (p \cup q) \cup r$$

Assoziativgesetze

$$p \cap (q \cup r) = (p \cap q) \cup (p \cap r)$$
$$p \cup (q \cap r) = (p \cup q) \cap (p \cup r)$$

Distributivgesetze

$$p \cap p = p$$
$$p \cup p = p$$

Idempotenz

$$\overline{(p \cap q)} = \overline{p} \cup \overline{q}$$
$$\overline{(p \cup q)} = \overline{p} \cap \overline{q}$$

deMorgansche Regeln

$$\overline{\overline{p}} = p$$

Doppelte Negation (Involution)

$$p \cup \emptyset = p$$
$$p \cap \Omega = p$$

Neutrale Elemente

$$p \cap \emptyset = \emptyset$$
$$p \cup \Omega = \Omega$$

“Nullmultiplikation”

$$p \cap \overline{p} = \emptyset$$
$$p \cup \overline{p} = \Omega$$

Inverses Element (Komplement)

2. Mengenlehre

2.4 Boolesche Algebren

Formale Zusammenfassung dieser beiden Konzepte:

Eine **Boolesche Algebra** ist eine Menge $\mathscr{B}$ aus Elementen mit den Operatoren ~ (einstellig) und $\oplus$ und $\odot$ (jeweils zweistellig) und den Konstanten 0 und 1, die folgenden Regeln genügen:

$p \odot q = q \odot p$

$p \oplus q = q \oplus p$

Kommutativgesetze

$p \odot (q \odot r) = (p \odot q) \odot r$

$p \oplus (q \oplus r) = (p \oplus q) \oplus r$

Assoziativgesetze

$p \odot (q \oplus r) = (p \odot q) \oplus (p \odot r)$

$p \oplus (q \odot r) = (p \oplus q) \odot (p \oplus r)$

Distributivgesetze

$p \odot p = p$

$p \oplus p = p$

Idempotenz

$\sim(p \odot q) = \sim p \oplus \sim q$

$\sim(p \oplus q) = \sim p \odot \sim q$

deMorgansche Regeln

$\sim\sim p = p$

Doppelte Negation (Involution)

$p \oplus 0 = p$

$p \odot 1 = p$

Neutrale Elemente

$p \odot 0 = 0$

$p \oplus 1 = 1$

“Nullmultiplikation”

$p \odot \sim p = 0$

$p \oplus \sim p = 1$

Inverses Element (Komplement)

2. Mengenlehre

2.4 Boolesche Algebren

Was bringt uns der Formalismus ?

Sehr viel: Boolesche Algebren fassen mehrere Konzepte zusammen, die wir bereits kennen !

➔ Einmal verstanden, mehrmals angewendet

➔ Sachverhalte, die aus den Eigenschaften einer Booleschen Algebra folgen, gelten für alle Mengen, die zum Konzept der Booleschen Algebra gehören.

Beispiele für solche Sachverhalte:

Normalformen (KNF, DNF)

Ordnungsrelationen

Auswertungsalgorithmen

Komplexitätsanalysen

2. Mengenlehre

2.4 Boolesche Algebren für Faule

Der Nachweis folgender Eigenschaften einer Booleschen Algebra reicht aus:

Eine **Boolesche Algebra** ist bereits durch eine Menge $\mathscr{B}$ aus Elementen mit den Operatoren ~ (einstellig) und $\oplus$ und $\odot$ (jeweils zweistellig) und den Konstanten 0 und 1 gegeben, die folgenden Regeln genügen:

$\mathbf{p} \odot \mathbf{q} = \mathbf{q} \odot \mathbf{p}$

$\mathbf{p} \oplus \mathbf{q} = \mathbf{q} \oplus \mathbf{p}$

Kommutativgesetze

$\mathbf{p} \odot (\mathbf{q} \oplus \mathbf{r}) = (\mathbf{p} \odot \mathbf{q}) \oplus (\mathbf{p} \odot \mathbf{r})$

$\mathbf{p} \oplus (\mathbf{q} \odot \mathbf{r}) = (\mathbf{p} \oplus \mathbf{q}) \odot (\mathbf{p} \oplus \mathbf{r})$

Distributivgesetze

$\mathbf{p} \oplus 0 = \mathbf{p}$

$\mathbf{p} \odot 1 = \mathbf{p}$

Neutrale Elemente

$\mathbf{p} \odot {\sim}\mathbf{p} = 0$

$\mathbf{p} \oplus {\sim}\mathbf{p} = 1$

Inverses Element (Komplement)

Das heißt:
Bei Erfüllung dieser 4 Grundgesetze sind die anderen Gesetze *Assoziativgesetze*, *deMorgansche Regeln*, *Idempotenz*, *Nullmultiplikation* und *doppelte Negation* automatisch erfüllt.

2. Mengenlehre

2.4 Boolesche Algebren: Weitere Beispiele

1. Schaltfunktionen-Algebra

$\mathscr{B} = \{f:\{0,1\}^n \rightarrow \{0,1\}\}$

$\sim f(x_1,\ldots,x_n) = 1 - f(x_1,\ldots,x_n)$

$(f \oplus g)(x_1,\ldots,x_n) = \max\{f(x_1,\ldots,x_n), g(x_1,\ldots,x_n)\}$

$(f \odot g)(x_1,\ldots,x_n) = \min\{f(x_1,\ldots,x_n), g(x_1,\ldots,x_n)\}$

Nullelement, Einselement ?

2. Teiler-Algebra

$\mathscr{B} = \{m \in \mathbb{N}\text{: m teilt n}\}$ für ein festes $n \in \mathbb{N}$,

für das die Primzahlzerlegung keine mehrfachen Primfaktoren enthält

$\sim p = n / p$

$p \oplus q = \mathrm{ggt}\,(p,q)$

$p \odot q = \mathrm{kgv}\,(p,q)$

Nullelement, Einselement ?