

# ***Grundlagen der Programmierung***

Vorlesung 3  
Sebastian Iwanowski  
FH Wedel

# Zusammenfassung: Aussagenlogische Formeln

## Formeln haben logische Eigenschaften (Semantik):

- **Erfüllbarkeit**
  - **Widerspruch**      äquivalent zu  $\perp$
  - **Tautologie**      äquivalent zu  $\top$
  - *Falsifizierbarkeit*
- } komplementär zueinander
- } komplementär zueinander

## Formeln haben Darstellungseigenschaften (Syntax):

- **Normalformen (KNF oder DNF)**
- **Mengendarstellung der KNF**

*Die eben genannten Darstellungseigenschaften sind für jede Formel durch Äquivalenz erzielbar.*

*Es gibt auch Darstellungseigenschaften, die nur für bestimmte Formeln möglich sind.*

**Bsp.:** KNF mit Klauseln aus genau drei Literalen

# Grundlagen der Programmierung

## 1. Einführung

Grundlegende Eigenschaften von Algorithmen und Programmen

## 2. Logik

Aussagenlogik

→ Prädikatenlogik

## 3. Programmentwicklung und –verifikation

Grundlagen der Programmverifikation

Verbundanweisungen

Verzweigungen

Schleifen

Modularisierung

Rekursion

## 4. Entwurf und Analyse von Algorithmen

Klassifikation von Algorithmen

Programmierung von Algorithmen

Bewertung von Algorithmen

# Grenzen der Aussagenlogik

## Gegeben

- Alle, die die Vorlesung besuchen, bestehen die Klausur (A)
- Susi besucht die Vorlesung (B1)
- Bernd besucht die Vorlesung (B2)
- Linda besucht nicht die Vorlesung (B3)
- Alex hat die Klausur nicht bestanden (B4)

## Gewünschte Folgerungen:

- Susi besteht die Klausur (C1)
- Bernd besteht die Klausur (C2)
- Linda ? Alex ?

## Aussagenlogische Formeln:

- $A \wedge B1 \rightarrow C1$
- $A \wedge B2 \rightarrow C2$
- ...

## Gewünschte Formel:

- $\text{besuchtVorlesung}(x) \rightarrow \text{bestehtKlausur}(x)$

### In der Aussagenlogik:

- **keine Variablen**
- **keine variablenabhängigen Aussagen**

# Grenzen der Aussagenlogik

## Gegeben

- Die Klausurnote eines Studenten, der alle Übungen gelöst hat, ist 1 oder 2 (A)
- Susi hat alle Übungen gelöst (B1)
- Bernd hat alle Übungen gelöst (B2)
- Linda hat nicht alle Übungen gelöst (B3)
- Alex hat eine 5 in der Klausur (B4)

## Gewünschte Formel:

- $\text{hatAlleÜbungenGelöst}(x) \rightarrow (\text{Klausurnote}(x) \leq 2)$

### In der Aussagenlogik:

- keine Variablen
- keine variablenabhängigen Aussagen
- keine Funktionen über Variablen

# Grenzen der Aussagenlogik

## Gegeben

- Eine Vorlesung, die nur von Studenten oder nur von Studentinnen besucht wird, ist langweilig (A)
- Susi ist eine Studentin (B1)
- Bernd ist ein Student (B2)
- Susi besucht GdP (B3)
- GdP ist nicht langweilig (B5)

## Gewünschte Formel:

- $((\text{besuchtVorlesung}(v, s) \rightarrow \text{weiblich}(s)) \vee (\text{besuchtVorlesung}(v, s) \rightarrow \neg \text{weiblich}(s))) \rightarrow \text{langweilig}(v)$
- Wie drückt man aus, dass eine Vorlesung nur von Studenten oder nur von Studentinnen besucht wird ?
- Wie drückt man aus, dass es für jede Vorlesung überhaupt Studenten oder Studentinnen geben sollte, die sie besuchen ?

### In der Aussagenlogik:

- **keine Variablen**
- **keine variablenabhängigen Aussagen**
- **keine Funktionen über Variablen**
- **keine Operatoren „für alle“ oder „es gibt“**

# Von der Aussagenlogik zur Prädikatenlogik

## In der Aussagenlogik:

- keine Variablen
- keine variablenabhängigen Aussagen
- keine Funktionen
- keine Operatoren „für alle“ oder „es gibt“

## In der Prädikatenlogik:

- Variable
- Prädikate
- Funktionen
- Quantoren

# Prädikatenlogik

- **Variable**

**In eine Variable dürfen beliebige Elemente eingesetzt werden.**

**Könnten nicht die Literale in der Aussagenlogik als Variable aufgefasst werden ?**

***Was ist bei Literalen in der Aussagenlogik anders ?***

- **Prädikate**

**Ein Prädikat ist eine Aussage, die von anderen Werten abhängt.**

**Die Anzahl der Werte, von denen ein Prädikat abhängt, ist für jedes Prädikat eine beliebige, aber feste Zahl.**

**Ein Prädikat, das von  $k$  Werten abhängt, heißt  $k$ -stellig.**

**Kurzform:  $P(x_1, x_2, \dots, x_k)$**



# Prädikatenlogik

- **Beispiele zu Prädikaten:**

1. Zwei Personen sind miteinander verheiratet
2. Eine Person liebt eine andere
3. Eine Person hasst eine andere
4. Eine Person besucht die Vorlesung GdP
5. Eine Person besucht eine beliebige Vorlesung
6. Ein Ort liegt zwischen zwei anderen

# Prädikatenlogik

- **Funktionen**

**Eine Funktion ist eine Zuordnung, die einer Menge von Werten einen neuen Wert eindeutig zuordnet.**

**Kurzform:  $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = y$**

**Eine Funktion, die von k Werten abhängt, heißt k-stellig.**

**Bsp.: Drücke folgenden Sachverhalt mit prädikatenlogischen Hilfsmitteln aus:**

**$(2 < x < 4) \wedge (0 < y < 6) \wedge (x + y > 7) \wedge (x \cdot y < 10)$**

# Prädikatenlogik

- **Quantoren**

Der **Existenzquantor**  $\exists x$  ( . . . ) drückt aus, dass es einen Wert für  $x$  gibt, der den dahinter stehenden Ausdruck zu einer wahren Aussage macht.

Der **Allquantor**  $\forall x$  ( . . . ) drückt aus, dass jeder Wert für  $x$  den dahinter stehenden Ausdruck zu einer wahren Aussage macht.

Die Definitionsbereiche für die Variablen dürfen eingeschränkt werden:

Für den Existenzquantor ist das eine Verschärfung,  
für den Allquantor eine Abschwächung der Aussage.

**Bsp.:**

$$\exists x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{R} ((2 < x < 4) \wedge (0 < y < 6) \wedge (x + y > 7) \wedge (x \cdot y < 10))$$

$$\forall x \in \mathbb{R} (x \cdot x \geq 0)$$

# Prädikatenlogische Formeln

- Eine **prädikatenlogische Formel 1. Stufe** ist eine Verknüpfung von endlich vielen Variablen, Funktionen und Prädikaten mit aussagenlogischen Operatoren oder Quantoren, die sich nur auf Variable beziehen.

Bsp.:  $\forall x ( R(y, z) \wedge \exists y (\neg P(y, x) \vee R(y, z)) )$

**Grüne** Vorkommen von  $y$  und  $z$  sind **frei**.

**Rote** Vorkommen von  $x$ ,  $y$  und  $z$  sind **gebunden**.

# Prädikatenlogische Formeln

- Eine **Belegung einer Formel** ist eine Zuweisung von *Werten aus festgelegten Definitionsbereichen an die freien Variablen* derart, dass dieselben Variablen immer denselben Wert erhalten.
- Eine Formel heißt **erfüllbar**, wenn es eine Belegung gibt derart, dass die Formel wahr ist.
- Das Erfüllbarkeitsproblem ist in der Prädikatenlogik **nicht entscheidbar**, d.h. kein Algorithmus kann jemals in der Lage sein, von jeder Formel zu entscheiden, ob sie erfüllbar ist oder nicht.



***Das allgemeine Problem ist unlösbar !***

***Beim nächsten Mal:***

**Prädikatenlogik, 2. Teil**