
Aufgaben zur Klausur in *Diskrete Mathematik (SS 2005)*

Zeit: 90 Minuten,
erlaubte Hilfsmittel: Taschenrechner

Bitte tragen Sie Ihre Antworten und fertigen Lösungen auf gesonderten karierten Blättern ein.

Vergessen Sie nicht, das Deckblatt auszufüllen und zu unterschreiben.

Für die Prüfung werden insgesamt 45 Bewertungseinheiten (BE) vergeben. Zum Bestehen benötigen Sie mindestens 22,5 BE.

Viel Erfolg !

1. Aufgabe (8 BE):

Die Relation **Präfix** (A,B) auf der Menge aller Wörter sei definiert als:

Präfix (A,B) $\Leftrightarrow$ Das Wort B beginnt mit Wort A, eventuell gefolgt von weiteren Buchstaben

- a) Untersuchen Sie, ob **Präfix** eine Ordnungs- und ob es eine Äquivalenzrelation ist. Begründen Sie Ihre Antwort für beide Relationstypen! (5 BE)
- b) Zeichnen Sie ein vollständiges Hasse-Diagramm der Relation **Präfix** für die Wörter TOR, ROT, TORNADO, ROTOR, KONTOR, KONTO, TORNADOROT (2 BE)
- c) Benennen Sie die maximalen und minimalen Elemente von b) (1 BE)

2. Aufgabe (6 BE)

Gegeben sei die Boolesche Algebra $\mathcal{B} = \{m \in \mathbb{N} : m \text{ teilt } 24\}$ mit den Operationen i), ii), iii):

- i) $\sim p = 24 / p$
- ii) $p \oplus q = \text{ggT}(p,q)$
- iii) $p \odot q = \text{kgV}(p,q)$

- a) Geben Sie das Nullelement und das Einselement an! (1 BE)
- b) Geben Sie das Komplement von 8 an! (1 BE)
- c) Zeigen Sie, dass beide Distributivgesetze für die Elemente 4, 6 und 8 erfüllt sind (mit Angabe der Zwischenwerte)! (4 BE)

3. Aufgabe (6 BE)

Beweisen Sie durch vollständige Induktion:

Es gibt $n!$ verschiedene Möglichkeiten, n Studenten auf n Plätze zu verteilen.

4. Aufgabe (3 BE)

Bestimmen Sie den ggT und das kgV von 1024 und 4160 mit Hilfe des Euklidischen Algorithmus! Geben Sie die Zwischenschritte an!

5. Aufgabe (6 BE)

Sie sollen ein kryptographisches Verfahren mit Hilfe eines endlichen Körpers entwickeln. Sie dürfen wahlweise mit 6 oder mit 7 Elementen arbeiten.

- Wofür entscheiden Sie sich? Geben Sie eine Begründung für beide Zahlen an! (2 BE)
- Geben Sie die Additions- und Multiplikationstabelle des Körpers an, für den Sie sich entschieden haben! (4 BE)

6. Aufgabe (3 BE)

Hubert Naseweis gefällt die komplizierte Methode seines Professors zur Konstruktion endlicher Körper nicht. Er meint, das ginge einfacher und liefert für 4 Elemente das Beispiel:

+	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

•	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	3	1
3	0	3	1	2

- Zeigen Sie, dass Hubert keinen Körper konstruiert hat (Tipp: Berechnen Sie $(2+2) \cdot 3$)!
- Welche Operationstafel muss Hubert verändern, um doch noch einen Körper zu erhalten? (Angabe der Lösung nicht erforderlich)

7. Aufgabe (5 BE)

Geben Sie alle geraden Permutationen aus 4 Elementen an!

Begründen Sie, dass die von Ihnen angegebenen Permutationen gerade sind und dass es keine weiteren gibt!

8. Aufgabe (8 BE)

Gegeben sei der unten angegebene Graph. Hierbei bezeichnen die Buchstaben die Ecken und die Ziffern die Kanten. Die Kantenlänge sei gleich ihrer Ziffer.

- Geben Sie einen minimal spannenden Baum an! (1 BE)
- Geben Sie das Gerüst an, das entsteht, wenn der kürzeste Weg von A nach F mit dem Algorithmus von Dijkstra berechnet wird! Geben Sie in groben Schritten an, wie der Algorithmus von Dijkstra in diesem Fall vorgeht! (4 BE)
- Ist der Graph planar? Begründen Sie Ihre Antwort! (1 BE)
- Geben Sie die (Ecken-)Färbungszahl des Graphen an und begründen Sie Ihre Antwort! (2 BE)

