Diskrete Mathematik

Inhalte 6. Vorlesungswoche
Sebastian Iwanowski
FH Wedel

Referenz zum Nacharbeiten:

Beutelspacher 5.1-5.5

4. Zahlentheorie

*In diesem Kapitel repräsentieren die Variablen aller Definitionen und Sätze (Regeln), wenn nicht anders spezifiziert, **ganze** Zahlen (Elemente von $\mathbb{Z}$).*

4.1 Teilbarkeit

Definition von Teilbarkeit

Eine ganze Zahl m ***teilt*** eine ganze Zahl n, wenn es eine ganze Zahl q gibt mit: n = q·m

$(\forall\, m, n \in \mathbb{Z}: m \mid n :\Leftrightarrow \exists q \in \mathbb{Z}: n = q \cdot m)$

Teilbarkeitssätze über Summen, Differenzen und Produkte

1) $m \mid n_1 \wedge m \mid n_2 \Rightarrow m \mid (n_1 + n_2)$

2) $m \mid n_1 \wedge m \mid n_2 \Rightarrow m \mid (n_1 - n_2)$

3) $m \mid n_1 \qquad\qquad \Rightarrow m \mid (n_1 \cdot n_2)$

4. Zahlentheorie

4.1 Teilbarkeit

Größenbeschränkungen für Teiler und Vielfache

1) Für jeden echten Teiler $m \neq 1, n$ von n gilt: $m \leq | n / 2 |$

2) Für zwei Teiler p, q von n mit $p \cdot q = n$ gilt: $(p \leq \sqrt{n}) \vee (q \leq \sqrt{n})$

3) Die einzigen Vielfachen n von m mit $| n | \leq | m |$ sind $-m$, 0 und m

4. Zahlentheorie

4.1 Teilbarkeit

Zahlendarstellungen mit Hilfe von Zahlenbasen

Dezimale Darstellung

Binäre Darstellung

Definition der Quersumme in Abhängigkeit von der Zahlenbasis

Quersummenregeln

Eine Zahl ist durch 3 teilbar
$\Leftrightarrow$ Die dezimale Quersumme der Zahl ist durch 3 teilbar

Eine Zahl ist durch 9 teilbar
$\Leftrightarrow$ Die dezimale Quersumme der Zahl ist durch 9 teilbar

Für die *binäre* Quersumme gibt es keine entsprechende Quersummenregel

4. Zahlentheorie

4.1 Teilbarkeit

Definition von ggT und kgV

$a = \text{ggT}(m,n) :\Leftrightarrow (a \mid m) \wedge (a \mid n) \wedge [(b \mid m) \wedge (b \mid n) \Rightarrow (b \leq a)]$

$a = \text{kgV}(m,n) :\Leftrightarrow (m \mid a) \wedge (n \mid a) \wedge (a > 0) \wedge [(m \mid b) \wedge (n \mid b) \wedge (b \neq 0) \Rightarrow (a \leq |b|)]$

Zusammenhang zwischen ggT und kgV

$\forall\, m,n \in \mathbb{Z}: \quad \text{ggT}(m,n) \cdot \text{kgV}(m,n) = m \cdot n$

Teilbarkeitsregel für teilerfremde Zahlen

Definition: Zwei ganze Zahlen m,n heißen teilerfremd $:\Leftrightarrow \text{ggT}(m,n) = 1$

Satz: Für zwei teilerfremde Zahlen m,n und eine ganze Zahl a gilt :
$m \mid a \wedge n \mid a \Rightarrow m \cdot n \mid a$

4. Zahlentheorie

4.2 Teilen mit Rest

Definition von ganzzahligem Quotienten und Rest

(1) Sei $n = q \cdot m + r$ für ganze Zahlen n,m,q,r, $0 \leq r < m$

Dann ist q der ganzzahlige Quotient von n geteilt durch m ($q = n$ DIV m)

Dann ist r der ganzzahlige Rest von n geteilt durch m ($r = n$ MOD m)

Eindeutigkeit und Existenz von ganzzahligem Quotienten und Rest

Für beliebige zwei ganze Zahlen n und $m \neq 0$ gibt es die Darstellung (1)

Die Darstellung (1) ist eindeutig,
d.h. q und r sind zu gegebenen n,m eindeutig bestimmt.

4. Zahlentheorie

4.2 Teilen mit Rest

Euklidischer Algorithmus zur Bestimmung von ggT und kgV

Satz: Sei $n = q \cdot m + r$ für ganze Zahlen n,m,q,r, $0 \leq r < m$

Dann gilt: $\mathrm{ggT}(n,m) = \mathrm{ggT}(m,r)$

Algorithmus:

1) Berechne q und r für n und m
2) Falls $r = 0$: Setze $m :=$ ggT, fertig!
   Anderenfalls: Setze $n := m$ und $m := r$ und gehe zu 1)