Diskrete Mathematik

Inhalte 5. Vorlesungswoche

Sebastian Iwanowski
FH Wedel

Referenzen zum Nacharbeiten:

Meinel 7.4, 7.5
Beutelspacher 3
Lang 2.2
Meinel 6 (lesenswerte Vertiefung: Beutelspacher 1, 2)

3. Beweisverfahren

3.2 Vollständige Induktion

Verallgemeinertes Grundprinzip:

Zu beweisen ist eine Aussage der Form A(n) für ein beliebiges n $\in \mathbb{N}$

1) **Induktionsverankerung:** Beweise: Es gilt A (0)
2) **Induktionsschluss:** Beweise: Aus A (0), ..., A(n) folgt A (n+1)

Anwendungsbeispiele:

1) Primzahlzerlegung
2) Teilbarkeitsnachweis über Quersummenbildung

3. Beweisverfahren

3.2 Vollständige Induktion

Induktive Definitionen:

1) **Definitionen für konstante natürliche Zahlen (in der Regel 0 oder 1)**
2) **Regel(n), wie man aus Vorgänger den Nachfolger konstruiert**

Beispiele:

1) Fakultät
2) Fibonaccizahlen

3. Beweisverfahren

3.2 Vollständige Induktion

Verallgemeinerung: Rekursive Definitionen:

1) **Definitionen für Konstante (terminale Elemente)**
2) **Regel(n) für die Bildung neuer Elemente aus alten Elementen**

Beispiele:

1) Alphabetdefinitionen
2) Backus-Naur-Formen für Syntax von Programmiersprachen
   (wird in anderen Vorlesungen näher besprochen)

3. Beweisverfahren

3.2 Vollständige Induktion

Anwendungen in der Geometrie und Graphentheorie

Beispiel: Färbung von Landkarten

Definition:

Eine **Landkarte** ist eine Unterteilung eines zweidimensionalen Gebiets in Zellen (den Ländern), die von eindimensionalen Kurven (den Grenzen) begrenzt werden.
Länder können auch ins Unendliche offen sein.

Definition:

Eine **zulässige Färbung** einer Landkarte ist eine Zuweisung von Farben an jedes Land der Landkarte derart, dass benachbarte Länder (solche mit einer gemeinsamen Grenze, Grenzpunkte zählen nicht) unterschiedliche Farben haben.
Ziel ist es, mit möglichst wenigen Farben auszukommen.

Anwendung:

Färbung von Landkarten, deren Grenzen regelmäßige Gebilde (z.B. Geraden oder Kreise) sind.

3. Beweisverfahren

3.3 Beweisstrategien

Direkter Beweis

$(p \longrightarrow q) \land p \Rightarrow q$

Modus ponens

Beweis durch Kontraposition

$p \longrightarrow q \Leftrightarrow \neg q \rightarrow \neg p$

Kontraposition

Indirekter Beweis (Widerspruchsbeweis)

$(\neg p \longrightarrow q) \land (\neg p \rightarrow \neg q) \Rightarrow p$

Indirekter Beweis

$(\neg p \longrightarrow p) \Rightarrow p$

Widerspruchsbeweis

$(\neg p \longrightarrow \perp) \Rightarrow p$

Widerspruchsbeweis

3. Beweisverfahren

3.3 Beweisstrategien

Äquivalenzbeweis

$$\mathbf{p \leftrightarrow q \Leftrightarrow (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)}$$

Ersetzen der Äquivalenz durch Implikationen

Beweis durch Fallunterscheidung

$$\mathbf{((p_1 \vee p_2) \rightarrow p) \wedge (p_1 \vee p_2) \Rightarrow p}$$

Fallunterscheidung für 2 Fälle

analog:
Fallunterscheidung
für mehr als zwei Fälle

Abzählbeweis (Schubfachprinzip, Taubenschlagverfahren)

Gegeben **f: M → N,** wobei **M,N** endlich sind

Dann gilt: $\mathbf{|M| > |N| \Rightarrow f}$ ist nicht injektiv